A • GUIMIER

Fondements mathématiques

de la

relativité restreinte

Table des Matières

Préface
Chaptre I : Présentation et axiomatique de la théorie .(p.4)
Chaptre II : Nécessité d'une transformation linéaire .(p.8)
Chaptre III : Etudes des cônes d'isotropie .(p.17)
Chaptre IV : Nature des vecteurs de l'espace − temps .(p.27)
Chaptre V : Vitesse relative de 2 repères .(p.35)
Chaptre VI : Nature de la transformation de Lorentz .(p.39)
Chaptre VII : Etude des matrices de Lorentz .(p.41)
Chaptre VIII : Trajectoires non − rectilignes .(p.72)
Bibliographie (p.81)

PREFACE

Le but de ce fascicule est de proposer une construction mathématique des fondements de la relativité restreinte . Il reprend des éléments dispersés dans de nombreux ouvrages.Il se limite au tout début de la théorie .
Il ne demande que la connaissance des mathématiques enseignées au niveau du premier cycle scientifique .Toutefois nous avons rappelé le maximum de résultats nécessaires , ainsi que leur démonstration indispensable à leur bonne compréhension .
Il demande aussi une connaissance minimale de la théorie physique étudiée .
Nous avons essayé de fragmenter ces démonstrations en de nombreux lemmes pour en faciliter la lecture •Il y aura donc beaucoup de mathématiques et trés peu de physique sinon pour donner les axiomes de départ •A partir de ces axiomes on montre que l'on peut arriver à l'expression d'une matrice de Lorentz dans le cas général uniquement à partir d'arguments mathématiques .
Pour tout commentaire, erreur trouvée , ... , veuillez m'écrire à guimier@hotmail.fr .

à Marseille , mars ***2020 .***

Chapitre I :

Présentation et axiomatique de la théorie :

(***a***) ***Contexte du problème :***

(α) *On considère un point (ou observateur)* $\boldsymbol{O}$, *dans un espace affine* $\boldsymbol{E}$,
qui modélise notre espace spatial physique, de direction $\vec{\boldsymbol{E}}$, *espace vectoriel*
à **3** *dimensions euclidien isomorphe à* $\mathbb{R}^3$. *On associe à* $\boldsymbol{O}$ *un repére orthornormé*
$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z)$ *muni d'une base* $\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *et muni de sa structure euclidienne naturelle.*
On munit $\boldsymbol{O}$ *d'une horloge qui mesure le temps* $\boldsymbol{t}$. *On suppose qu'à chaque point, fixe par rapport à* $\boldsymbol{O}$, *du repère* $\boldsymbol{Re}$ *est associé une horloge synchronisée avec celle de* $\boldsymbol{O}$ *qui mesure le même temps* $\boldsymbol{t}$ • *Cette synchronisation des horloges, proposée par Einstein dès le départ (voir par exemple C.Semay, B.Silvestre − Brac.* "Relativité restreinte" *. Dunod 2010.), permet d'avoir une variable* $\boldsymbol{t}$ *indépendante. On peut ainsi construire un espace vectoriel à* **4** *dimensions et un repère* $\mathscr{R}\left(\boldsymbol{O}_{t=0}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z\right)$, $\boldsymbol{O}_{t=0}$ *représentant le point* $\boldsymbol{O}$ *au temps* $\boldsymbol{t=0}$ *dans cet* ***espace***, *associé a une base* $\mathscr{B}\left(\boldsymbol{O}_{t=0}, c\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,
orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique $\phi(t, x, y, z) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$,
($\boldsymbol{c}$ *étant la vitesse de la lumière*) • *Pourquoi le choix d'une telle forme bilinéaire symétrique ?*
Elle représente l'équation du cône de lumière qui est physiquement un invariant pour tout autre observateur $\boldsymbol{O'}$ *en translation uniforme par rapport à* $\boldsymbol{O}$.
(*Voir l'annexe plus bas pour l'existence d'une telle base*).
On suppose que $\boldsymbol{Re}$ *est* ***galiléen*** *c'est à dire que si un point mobile, laissé à lui-même, sur lequel n'agit aucune force, continue sa trajectoire en ligne droite, à une vitesse uniforme.*
Cette hypothèse implique l'existence d'un seul temps, à un changement d'origine près ou à un changement d'unité près (lemme **4**).

(β) *On considère un autre point (ou observateur)* $\boldsymbol{O'}$ *ayant une vitesse uniforme* $\vec{\boldsymbol{V}}$ *par rapport à* $\boldsymbol{O}$ *et mesurée par* $\boldsymbol{O}$ *auquel est aussi associé un repére orthornormé*
$\boldsymbol{Re'}(\boldsymbol{O'}, x', y', z')$ *associé à une base* $\boldsymbol{B'}\left(\boldsymbol{O'}, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$.
Comme précédemment on munit $\boldsymbol{O'}$ *d'une horloge qui mesure le temps* $\boldsymbol{t'}$. *On suppose qu'à chaque point, fixe par rapport à* $\boldsymbol{O'}$, *du repère* $\boldsymbol{Re'}$ *est associé une horloge synchronisée avec celle de* $\boldsymbol{O'}$ *qui mesure le même temps* $\boldsymbol{t'}$. *On peut ainsi construire un repère*
$\mathscr{R}'\left(\boldsymbol{O'}_{t'=0}, t', x', y', z'\right)$ *associé à une base* $\mathscr{B}'\left(\boldsymbol{O'}_{t'=0}, c\vec{\tau'}, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right)$, *orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique* $\phi'(t', x', y', z') = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$,
on suppose aussi que $\boldsymbol{Re'}$ *est aussi galiléen.*
Les unités spatio-temporelles étant définies par les lois physiques qu'on supposera être les mêmes dans les **2** *repères (voir* $\boldsymbol{\varepsilon}$), *on choisira les mêmes unités dans les* **2** *repères.*

(γ) *On va supposer que les* **2** *observateurs passent par le même point de* $\boldsymbol{E}$ *au cours de leur cheminement et à ce moment-là,* $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ *mettent leur horloge à* **0** ($\boldsymbol{t = t' = 0}$).
Cette hypothèse non essentielle permet de simplifier les calculs.
Sinon on peut considérer un troisième observateur $\boldsymbol{O''}$, *ayant la même vitesse uniforme* $\vec{\boldsymbol{V}}$ *par rapport à* $\boldsymbol{O}$, *mais dont la trajectoire, une droite parallèle à de celle de* $\boldsymbol{O'}$, *coupe celle de* $\boldsymbol{O}$.

(δ) *On suppose que les photons se déplacent en ligne droite à la vitesse* $\boldsymbol{c}$, *indépendamment du repère considéré. On suppose aussi que* $\boldsymbol{c}$ *est la vitesse maximale possible.*

Cela implique que pour un photon émis depuis O *au temps* $t=0$ *, c'est à dire aussi depuis* O' *au temps* $t'=0$ *, ses coordonnées dans* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *vérifieront simultanément :*

$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0 \Leftrightarrow c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=0$ *(conservation du cône de lumière)* **.**

(ε) *Les lois de la physique sont les mêmes dans les* **2** *repères* **Re** *et* **Re'**.
Par exemple la loi qui donne **t** *en fonction de* **t'** *en* **O'** *pour* **O** *sera la même que celle qui donne* **t'** *en fonction de* **t** *en* **O** *pour* **O'**. *(Voir plus loin.)*

(b) Le problème :

On cherche une transformation $T:\mathcal{R}'\rightarrow\mathcal{R}$ *qui respecte* (δ) *et* (ε) .

(c) Comment résoudre ce problème :

L'hypothèse (ε) *implique que toute droite de* $\mathcal{R}'$ *se transforme en une droite de* $\mathcal{R}$.
Le ***chapitre II*** *montre que* **T** *doit être linéaire .Il est alors facile de voir que* **T** *est nécessairement bijectif puisque* $Ker(T) \neq \{\vec{0}\}$ *impliquerait qu'il existerait une droite spatio-temporelle puisse se transformer en un point .*
L'hypothèse (δ) *implique la conservation du cône de lumière et donc du cône d'isotropie de* ϕ**,** *le* ***chapitre III*** *montre alors que* ϕ *et* ϕ' *sont proportionnels et grâce à* (ε) *que* $\phi'\circ T=\phi$ *.Cette invariance permet d'expliciter* **T** *via l'étude des matrices de Lorentz du* ***chapitre VII*** *faites aprés l'étude de la nature des vecteurs au* ***chapitre IV*** *.*

<u>Utilisation des hypothèses physiques :</u>

$$\left[\text{ Les droites se transforment en droites }\right] \xrightarrow[\text{Chap II}]{} \left[\text{ La transformation est linéaire }\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{La transformation est linéaire}\\ \text{Invariance de } \mathbf{c} \text{ par la transformation linéaire}\end{array}\right] \xrightarrow[\text{Chap V}]{} \left[\text{ Vitesses relatives égales }\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Invariance de } \mathbf{c} \text{ par la transformation linéaire}\\ \text{Les lois de la physique sont les même}\end{array}\right] \xrightarrow[\text{Chap VI}]{} \left[\begin{array}{c}\text{La transformation est représentée}\\ \text{par une matrice de Lorentz}\end{array}\right]$$

<u>Annexe :</u>

(cf : J-M. Monier."Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997.)*

<u>Lemme 1 :</u>

Soit **E** *un espace vectoriel réel de dimension finie* **n** *.Pour toute forme* φ *bilinéaire symétrique définie sur* $E\times E$ *, il existe au moins une base* $B=\{e_i\}$ *orthogonale pour* φ*,* $(\varphi(e_i,e_j)=0 \text{ si } i\neq j)$ **.**

Démonstration :

On va raisonner par récurrence sur **n**.
Pour $n=1$ *c'est évident .*
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang **n** *et considérons* **E** *un espace de dimension* $n+1$.
On rappelle que $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{2}\cdot[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x,x)-\varphi(x,y)]$.
Si $\varphi=0$ *toute base est orthogonale .*
Si $\varphi\neq 0$ *il existe au moins un vecteur* e_1 *non isotrope et soit* $F=\{e_1\}^{\perp_\varphi}$ *et* $\varphi'=\varphi_{/F}$.

Montrons que $\mathbb{R}e_1$ *et* $\mathbf{F}$ *sont supplémentaires .On a :*

$$\left[\begin{array}{c} x=\alpha e_1+y \\ y\in F \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=\alpha e_1+y \\ \varphi(e_1,y)=0\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=\alpha e_1+y \\ \varphi(e_1,x)=\alpha\,\varphi(e_1,e_1)\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \alpha=\dfrac{\varphi(e_1,x)}{\varphi(e_1,e_1)} \\ y=x-\dfrac{\varphi(e_1,x)}{\varphi(e_1,e_1)}e_1\end{array}\right]$$

Donc pour $\mathbf{x}\in\mathbf{E}$ *, il existe un* α *unique et un* $\mathbf{y}\in\mathbf{F}$ *unique tel que*
$x=\alpha e_1+y$ **et** *donc* $\mathbf{E}=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbf{F}$ **.**

La dimension de $\mathbf{F}$ *est donc* $\mathbf{n}$*, et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à* $\mathbf{F}$ *: il existeune base* φ' *− orthogonale* $B'=\{e_2,....,e_{n+1}\}$ *de* $\mathbf{F}$ *.*

Considérons $B=\{e_1,e_2,....,e_{n+1}\}$ *, on a :*

$\mathbf{B}$ *est bien une base car* $\dim(E)=n+1$ *,* $e_1\notin Vect(e_2,....,e_{n+1})$ *et* $(e_2,....,e_{n+1})$ *est une famille libre .*

Elle est bien φ *− orthogonale :* $\varphi(e_1,e_j)=0$ *pour* $j=2,\dots,n+1$ **et** *donc*
$\varphi(e_i,e_j)=0$ *pour* $i=1,\dots,n+1, j=1,\dots,n+1$ **.**

<u>Lemme 2 :</u>

Soit $\mathbf{E}$ *un* $\mathbb{R}$ *− espace vectoriel de dimension* $\mathbf{n}$ *,* φ *étant une forme bilinéaire symétrique définie sur* $E\times E$ *, alors il existe au moins une base* $B=\{e_i\}$ *dans laquelle la matrice de* φ ***s'écrit*** *:*

$$Mat_B(\varphi)=\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=S_{p,q}$$ *avec* $\dim(Mat_B(\varphi))=n$ *,* I_u *: matrice unité de dimension* $\mathbf{u}$ *.*

Démonstration :

Il existe une base $\mathbf{B}'$ *composée de vecteurs orthogonaux pour* φ **.**

Si on pose $d_i=\varphi(e_i,e_i)$ *, on peut réordonner* $\mathbf{B}$ *pour que :*
$d_i>0$ *pour* $1\le i\le p$ *,* $d_i<0$ *pour* $p+1\le i\le p+q$ *,* $d_i=0$ *pour* $p+q+1\le i\le n$**.**

Notons $\mathbf{D}$ *la matrice diagonale dont la diagonale est composée des* d_i *: c'est la matrice qui représente* φ *dans la base* $\mathbf{B}'$ *.*

Posons pour $i=1,....,p+q$ *:* δ_i *tel que* $\delta^2_i=|d_i|$ *et* $\delta_i=1$ *pour* $i=p+q+1,...,n$ **.**

Notons $\mathbf{Q}$ *la matrice diagonale composée des* δ_i *.*

On vérifie que : $D=Q.S_{p,q}.Q$ **et** *donc que* $S_{p,q}=Q^{-1}.D.Q^{-1}$ **.**

<u>Lemme 3 :</u>

Soit $\mathbf{E}$ *un* $\mathbb{R}$*- espace vectoriel de dimension* $\mathbf{n}$ *,* φ *étant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée , définie sur* $E\times E$ *, alors il existe au moins une base* $B=\{e_i\}$

dans laquelle la matrice de φ *s'écrit :* $\boldsymbol{Mat_B(\varphi)} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$ *avec* $\boldsymbol{p+q=n}$.

Démonstration :

Immédiat d'aprés ce qui précéde .

On dira alors que la base est φ ***- orthonormée*** *.*

<u>Lemme 4 :</u>

(P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968 .)

Dans ce qui suit on se limite au changement de temps de classe $\mathcal{C}^2$ *et à dérivée première strictement positive. La propriété d'un mouvement de point dans un espace* $\mathcal{E}$ *d'être de classe* $\mathcal{C}^2$ *est invariante dans tout changement de temps défini ci - dessus • Il n'existe dans* $\mathcal{E}$ *qu'un seul temps galiléen à un changement d'origine ou à un changement d'unité près .*

Démonstration :

Considérons une courbes de classe $\mathcal{C}^2$ *,* **2** *temps* $\boldsymbol{t}$ *et* $\boldsymbol{t_1}$ *et une fonction de changement de temps* $\boldsymbol{\chi}$ *:*
$\boldsymbol{t=\chi(t_1)}$ *• Considérons une particule* $\boldsymbol{p}$ *parcourant cette courbe selon les* **2** *paramétrages en* $\boldsymbol{t}$ *et* $\boldsymbol{t_1}$ *:*
$\boldsymbol{t \rightarrow P(t) = P(\chi(t_1)) = P_1(t_1)}$ *,* $\boldsymbol{t_1 \rightarrow P_1(t_1)}$ *•* $\boldsymbol{P}$ *et* $\boldsymbol{P_1}$ *sont donc de classe* $\mathcal{C}^2$ *et si* $\boldsymbol{O}$ *est un point fixe de* $\mathcal{E}$ *:*

$$\frac{d\overrightarrow{OP_1}(t_1)}{d\,t_1} = \frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{d\,t}\,\frac{d\chi(t_1)}{d\,t_1} \quad et \quad \frac{d^2\overrightarrow{OP_1}(t_1)}{d\,t^2_1} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{d\,t^2}\left[\frac{d\chi(t_1)}{d\,t_1}\right]^2 + \frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{d\,t}\,\frac{d\chi^2(t_1)}{d\,t^2_1}$$

et les vitesses et les accélérations sont liés par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{V_1}(t_1) = \frac{d\chi(t_1)}{d\,t_1}\vec{V}(t) \;\; et\, \overrightarrow{\Gamma_1}(t_1) = \left[\frac{d\chi(t_1)}{d\,t_1}\right]^2\vec{\Gamma}(t) + \frac{d\chi^2(t_1)}{d\,t^2_1}\vec{V}(t) \,.$$

Si $\mathcal{E}$ *est galiléen et si aucune force s'exerce sur* $\boldsymbol{p}$ *on a :* $\vec{\Gamma}(t) = \overrightarrow{\Gamma_1}(t_1) = \vec{0}$ *et si* $\vec{V}(t) \neq \vec{0}$ *,*

$$\frac{d\chi^2(t_1)}{d\,t^2_1} = \vec{0} \text{ et donc } \chi(t_1) = a \cdot t_1 + b \text{ avec } a > 0\,.$$

Chaptre II :
Nécessité d'une transformation linéaire.

Introduction :

A cause de l'hypothèse qu'on fait sur sur l'homogéinité de l'espace − temps : il n'ya pas de position ou de moment privilégié, la position des extrémités d'un segment spatio-temporel dans un repère ne doit pas influer sur la transformation des coordonnées de ce segment dans un autre repère. Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *et* $\boldsymbol{t}$ *sont les coordonnées des points* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{T}$ *dans le repère d'origine et* $f(a)$, $f(b)$ *et* $f(t)$ *leur transformation dans le repère d'arrivée, on doit avoir :*

$$\forall (t, a, b) \in E^3 \quad f(a) - f(b) = f(a+t) - f(b+t).$$

Les lemmes **1**, **2**, **3** *et* **4** *montrent sous des hypothèses peu restrictives que f est nécessairement affine.*
De même la necessité que tout segment de droite doit se transformer en segment de droite (par exemple pensez aux lignes d'univers des particules infra − et supra − luminiques et des photons qui en l'absence de tout champ doivent être des droites) implique que f est affine (lemme **5** *), puis on démontre que pour les transformations bijectives le seul fait de faire l'hypothèse que* **3** *points alignés se transforment en* **3** *points alignés implique que f est affine (lemme* **15** *).*

Lemme 1 :

Soient $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{F}$ **2** *espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$, *f une application de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{F}$.
Si f est additive $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x \in E, \forall y \in E$ *alors elle est* $\mathbb{Q}$ **− linéaire.**

Démonstration :

Si est additive $f(0+0) = f(0) + f(0) = f(0)$ *donc* $f(0) = 0$,
donc $f(0 \cdot x) = 0$. *Supposons que* $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ *avec* $n \in \mathbb{N}$
$f((n+1)\cdot x) = f(n\cdot x + x) = f(n\cdot x) + f(x) = (n+1) f(x)$.
donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n\cdot x) = n \cdot f(x)$.
Soit $\boldsymbol{p}$ *et* $\boldsymbol{q}$ **2** *entiers naturels avec* $p \neq 0$.

$$\text{On a } f\left(\left(p\cdot\frac{q}{p}\right)\cdot x\right) = p\cdot f\left(\left(\frac{q}{p}\right)\cdot x\right) \text{ et } \frac{1}{p}\cdot f(q\cdot x) = f\left(\left(\frac{q}{p}\right)\cdot x\right) = \frac{q}{p}\cdot f(x).$$

Lemme 2 :

Soient $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{F}$ **2** *espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}$ *une application de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{F}$,
Si $\boldsymbol{f}$ *est* $\mathbb{Q}$-**linéaire** *et* $\boldsymbol{E}$ *de dimension finie* $\boldsymbol{n}$ *alors :*
$\boldsymbol{f}$ *est continue* $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}$ *est* $\mathbb{R}$-*linéaire.*

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *on sait que* $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda^n$ **avec** $\lambda^n \in \mathbb{Q}\ \forall n$.

$$D'où : f(\lambda\cdot x) = f\left(\left(\lim_{n\to+\infty}\lambda^n\right)\cdot x\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\lambda^n\cdot x\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to+\infty}\lambda^n\right)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x).$$

Réciproquement si $\boldsymbol{f}$ *est* $\mathbb{R}$-*linéaire et* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\boldsymbol{E}$ *montrons la continuité de* $\boldsymbol{f}$ *en* $\boldsymbol{0}$ *ce qui montrera que* $\boldsymbol{f}$ *est partout continue.*

Soit (e_i) *une base finie de E et* $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i$

$$\| f(x) \| = \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\cdot e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\mu_i\cdot f(e_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i\right|\cdot\|f(e_i)\|.$$

Corollaire :

Soient $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{F}$ **2** *espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$, *normés ,*
$\boldsymbol{f}$ *une application de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{F}$ *.*
Si $\boldsymbol{f}$ *est additive et s'il existe* $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E}$ *, un voisinage borné de* $\boldsymbol{a}$: $\mathcal{V}(\boldsymbol{a})$ *tel que* $\boldsymbol{f}(\mathcal{V}(\boldsymbol{a}))$ *soit aussi borné alors* $\boldsymbol{f}$ *est continue et* $\mathbb{R}$*-linéaire .*

Démonstration :

Soit la boule ouverte $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, 2\varrho) \subseteq \mathcal{V}(\boldsymbol{a})$ *, on peut supposer que* $\varrho \in \mathbb{Q}$ *et considérons la boule fermée* $\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{a}, \varrho)$: $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{a}, \varrho))$ *est borné .*

Si on remarque que $\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{a}, \varrho) = \{x \in E / \|x - a\| \leq \varrho\}$
$= \{a + y \in E / \|y\| \leq \varrho\} = a + \{y \in E / \|y\| \leq \varrho\}$ *et que*
$\overline{\boldsymbol{B}}(0, \varrho) = \{x \in E / \|x\| \leq \varrho\} = \left\{x \in E / \left\| \dfrac{x}{\varrho} \right\| \leq 1\right\}$
$= \{\varrho x \in E / \|x\| \leq 1\} = \varrho\{x \in E / \|x\| \leq 1\}$ *on en déduit que*
$f(\overline{B}(a, \varrho)) = f(a + \varrho\overline{B}(0, 1)) = f(a) + \varrho f(\overline{B}(0, 1))$ *donc*
$f(\overline{B}(0, 1))$ *est borné .Montrons que* $\boldsymbol{f}$ *est continue en* **0.**

Comme $\exists M > 0$ *tel que* $\forall x \in \overline{B}(0, 1)$ $\|f(x)\| \leq M.$

Soit $x \in E$ *, soit la suite* $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $\varrho_n \in \mathbb{Q}$,
$2\varrho > \varrho_n > \varrho_{n+1} > \|x\|$ *et* $\lim_{n \to +\infty} \varrho_n = \|x\|$.

On a : $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| \dfrac{x}{\varrho_n} \right\| \leq 1 \Rightarrow \left\| f\left(\dfrac{x}{\varrho_n} \right) \right\| \leq M \Rightarrow \|f(x)\| \leq M\varrho_n$
et cela $\forall n \in \mathbb{N}$ *donc* $\boldsymbol{f}$ *est continue en* **0** *.*

Soit $a \in E$ *et* $\varepsilon > 0$ *comme* $f(x) - f(a) = f(x - a)$, **si** $\|x - a\| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$

on a $\|f(x) - f(a)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{M} M = \leq \varepsilon$*.Donc est* $\boldsymbol{f}$ *est continue partout .*

Lemme 3

Soient $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{F}$ **2** *espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}$ *une application de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{F}$ *.*
On a l'équivalence :
$\forall (t, a, b) \in E^3$ $f(a) - f(b) = f(a + t) - f(b + t) \Leftrightarrow f$ *est* $\mathbb{Q}$-***affine*** *.*
Si de plus $\boldsymbol{f}$ *est continue et* $\boldsymbol{E}$ *de dimension finie on peut remplacer* $\mathbb{Q}$-***affine*** *par* $\mathbb{R}$-***affine*** *.*

Démonstration :

On a $\forall (t, a, b) \in E^3$ $f(a + t) - f(a) = f(b + t) - f(b)$,
en particulier si $b = 0$ $f(a + t) - f(a) = f(t) - f(0)$ $\quad (1)$
Posons $g(t) = f(t) - f(0) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + f(0)$.
De (1) $f(a + t) - [f(a) + f(t)] = -f(0)$
donc $(g(a + t) + f(0)) - [(g(a) + f(0)) + (g(t) + f(0))] = -f(0)$,
et $\quad g(a + t) - [g(a) - g(t)] = 0$,
donc, g est additive , donc $\mathbb{Q}$ − ***linéaire*** *par le lemme* **1** *, et* $\boldsymbol{f}$ *est* $\mathbb{Q}$ − ***affine*** *.*
Réciproqement si f est $\mathbb{Q}$-***affine*** , $g(t) = f(t) - f(0)$ *est* $\mathbb{Q}$-***linéaire***
donc additive et $g(a + t) - g(b + t) = g(a) - g(b)$ *d'où :*
$(g(a + t) + f(0)) - (g(b + t) + f(0)) = (g(a) + f(0)) - (g(b) + f(0))$ *et*
$f(a + t) - f(b + t) = f(a) - f(b)$.
Pour la dernière assertion appliquer le lemme **2 .**

Lemme 4 :

Soient $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{F}$ **2** *espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{f}$ *une application différentiable de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{F}$ *.*
On a l'équivalence :

$\forall (t, a, b) \in E^3 \; f(a) - f(b) = f(a+t) - f(b+t) \Leftrightarrow f$ *est* $\mathbb{R}$*-**affine**.*

Démonstration :

Soit $\lambda > 0$ *: on a* $\dfrac{f(a) - f(a+t)}{\lambda} = \dfrac{f(b) - f(b+t)}{\lambda}$.

La fonction étant différentiable, en faisant $\lambda \to 0^+$ *, on obtient :*

$$\forall (t, a, b) \in E^3 \quad \frac{\partial}{\partial t} f(a) = \frac{\partial}{\partial t} f(b) \Rightarrow f' \text{ est constante}$$

et donc f est affine .

La réciproque est immédiate .

<u>Lemme 5 :</u>

Soient E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*, f une application de* E *dans* E *. On a l'équivalence :*

f est affine $\Leftrightarrow \forall \lambda \; 0 \le \lambda \le 1, \forall x \in E, \forall y \in E, f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Démonstration :

Si f est affine $g(x) = f(x) - f(0)$ *est linéaire , par linéarité :*

$\forall \lambda \; 0 \le \lambda \le 1, \forall x \in E, \forall y \in E, g(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$ *donc :*

$g(\lambda x + (1-\lambda) y) - f(0) = \lambda(g(x) - f(0)) + (1-\lambda)(g(y) - f(0))$ *et donc :*

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Réciproquement posons $g(x) = f(x) - f(0) \quad \forall x \in E$ *et montrons que g est linéaire .*

On a : $g(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(\lambda x + (1-\lambda) y) - f(0)$,

$\lambda g(x) = \lambda(f(x) - f(0))$ *et* $(1-\lambda) g(x) = (1-\lambda)(f(x) - f(0))$.

Comme : $f(\lambda x + (1-\lambda) y) - f(0) = [\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)] - [\lambda f(0) + (1-\lambda) f(0)]$

$= \lambda(f(x) - f(0)) + (1-\lambda)(f(y) - f(0))$ *donc*

$g(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \; \forall \lambda \; 0 \le \lambda \le 1, \forall x \in E, \forall y \in E$ **et** $g(0) = 0$.

Si $y = 0 \quad g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \forall \lambda \; 0 \le \lambda \le 1, \forall x \in E$.

D'autre part : $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2} g(x) + \dfrac{1}{2} g(x)$ *or* $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2} g(x+y)$ *et donc*

g est additive : $g(x+y) = g(x) + g(y)$ *et donc* $\mathbb{Q}$ *- linéaire .*

Comme $0 = g(0) = g(x - x) = g(x) + g(-x)$ *on a* $g(-x) = -g(x)$.

Si λ *est tel que* $0 \ge \lambda \ge -1$ *on a* $0 \le -\lambda \le 1$ **et** *donc* $g(\lambda x) = -g(-\lambda x) = \lambda g(x)$ *d'où :*

$g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \forall \lambda \; -1 \le \lambda \le 1, \forall x \in E$.

Si $\lambda \ge 1 \;\; \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 \le \dfrac{\lambda}{n} \le 1$ *et on a :*

$g\left(\dfrac{\lambda x}{n}\right) = \dfrac{\lambda}{n} g(x) = g\left(\dfrac{\lambda x}{n}\right) = \dfrac{1}{n} g(\lambda x)$ *et donc* $g(\lambda x) = \lambda g(x) \;\; \forall \lambda \;\; 0 \le \lambda$.

Si $\lambda \le -1$ *comme* $g(-x) = -g(x) \quad g(-\lambda x) == -g(\lambda x) = g(-\lambda x) = -\lambda g(x)$ *et* $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

Donc g *est bien linéaire est* f *affine .*

<u>Définition :</u>

On apelle automorphisme de corps toute application bijective ι *d'un corps* $\mathbb{K}$ *sur lui même tel que* $\iota(x+y) = \iota(x) + \iota(y) \; (1)$ *et* $\iota(x \cdot y) = \iota(x) \cdot \iota(y) \; (2) \quad \forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}$.

<u>Lemme 6 :</u>

Il exite un seul automorphisme du corps des nombres réels : l'identité .

Démonstration :

$(1) \Rightarrow \iota(0+0) = \iota(0) + \iota(0) = \iota(0) \Rightarrow \iota(0) = 0$.

$(2) \Rightarrow \iota(1 \cdot 1) = \iota(1) \cdot \iota(1) = \iota(1) \Rightarrow \iota(1) = 1$.

$(1) \Rightarrow 0 = \iota(x - x) = \iota(x) + \iota(-x) = 0 \Rightarrow \iota(-x) = -\iota(x) \quad (3)$

On a $\iota(1+1) = \iota(1) + \iota(1) = 2\iota(1) = 2$.

Si $\iota(n) = n$ alors $\iota(n+1) = \iota(n) + \iota(1) = n+1$ donc $\iota(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $p \in \mathbb{N}^\star \quad \iota\left(\frac{p \cdot 1}{p}\right) = \iota(1) = 1 = \iota(p) \cdot \iota\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow \iota\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\iota(p)} = \frac{1}{p}$ donc

$\iota\left(\frac{n}{p}\right) = n \cdot \iota\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{n}{p} \qquad \forall p \in \mathbb{N}^\star \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4)$.

Par (3) et (4) $\forall q \in \mathbb{Q} \quad \iota(q) = q \quad (5)$.

Soit $x > 0$ alors $x = y^2$ donc $\iota(x) = \iota(y^2) = \iota(y) \cdot \iota(y) > 0$.

Si $x > y \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow \iota(x-y) > 0 \Rightarrow \iota(x) > \iota(y)$

donc ι est une application croissante.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ il existe une suite croissante (g_n) et une suite décroissante (h_n) de nombres rationnels qui convergent vers x.

On donc $g_n < g_{n+1} < \ldots\ldots < x < \ldots\ldots < h_{n+1} < h_n$

comme ι est une application croissante on a :

$\iota(g_n) = g_n < \iota(g_{n+1}) = g_{n+1} < \ldots\ldots\ldots < \iota(x) < \ldots\ldots < \iota(h_{n+1}) = h_{n+1} < \iota(h_n) = h_n$

par unicité de la limite $x = \iota(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Et par (5) $x = \iota(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Définition :</u>

Pour toute la suite $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{K}$ de dimension n. On note $< a_0, \ldots\ldots, a_n >$ le sous espace affine engendré par l'emsemble des points de $\mathcal{E}$: $\{a_0, \ldots\ldots, a_n\}$.

<u>Lemme 7 :</u>

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

Soit $r \geq 2$, $a_0, \ldots\ldots, a_r \in \mathcal{E}$,, $x \in \langle a_0, \ldots\ldots, a_r \rangle$

alors il existe $p \in \langle a_0, a_1 \rangle$ et $q \in \langle a_0, a_2 \ldots\ldots, a_r \rangle$ tel que $x \in \langle p, q \rangle$.

Démonstration :

On peut écrire $\overrightarrow{a_0 x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i}$ (non forcément d'une manière unique) .

Soit $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, posons $p \in \langle a_0, a_1 \rangle$ et $q \in \langle a_0, a_2 \ldots\ldots, a_r \rangle$ tel que :

$$\overrightarrow{a_0 p} = \mu \lambda_1 \overrightarrow{a_0 a_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_0 q} = \frac{\mu}{\mu - 1} \sum_{i=2}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} \quad \text{on a :}$$

$$\overrightarrow{a_0 x} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{a_0 p} + \frac{\mu - 1}{\mu} \overrightarrow{a_0 q}.$$

Comme $\frac{1}{\mu} + \frac{\mu - 1}{\mu} = 1$ x est le barycenre de p et q et donc $x \in \langle p, q \rangle$.

<u>Lemme 8 :</u>

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que si a, b, c sont 3 points alignés quelconques de $\mathcal{E}$

alors $f(a), f(b)$ *et* $f(c)$ *sont alignés on a le résultat suivant :*

$\forall r \geq 1 \quad f(\langle a_0, a_1 \ldots\ldots, a_r \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1) \ldots\ldots, f(a_r) \rangle$.

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur r .

Pour $r = 1$ *si* $x \in \langle a_0, a_1 \rangle$ *alors x appartient à la droite définie par* a_0 *et* a_1 *donc* x, a_0 *et* a_1 *sont alignés donc* $f(a), f(b)$ *et* $f(x)$ *sont alignés par hypothèse et donc* $f(x) \in \langle f(a_0), f(a_1) \rangle$.

Pour $r \geq 2$ *supposons que la propriété est vrai jusqu'auu rang* $r - 1$ *et soit* $x \in \langle a_0, a_1 \ldots\ldots, a_r \rangle$ *d'aprés le* ***lemme 2*** $x \in \langle p, q \rangle$ *avec* $p \in \langle a_0, a_1 \rangle$ *et* $q \in \langle a_0, a_2 \ldots\ldots, a_r \rangle$ *d'aprés ce qui précéde* $f(x) \in \langle f(p), f(q) \rangle$

avec $f(p) \in f(\langle a_0, a_1 \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1) \rangle$ *et*

$f(q) \in f(\langle a_0, a_2 \ldots\ldots, a_r \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_2) \ldots\ldots, f(a_r) \rangle$

d'aprés l'hypothèse de récurrence .Et donc :

$f(x) \in \langle f(p), f(q) \rangle \subseteq \langle f(a_0), f(a_1) \ldots\ldots, f(a_r) \rangle$ *et*

$f(\langle a_0, a_1 \ldots\ldots, a_r \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1) \ldots\ldots, f(a_r) \rangle$.

<u>Définition :</u>

Soit $\mathscr{E}$ *un espace affine sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* n.

La famille de points de $\mathscr{E}$ *:* $\{a_i\}_{i=1,\ldots,k}$ *est dite* ***affinement indépendante*** *si*

$\dim(\langle a_0, a_2 \ldots\ldots, a_k \rangle) = k$.

<u>Lemme 9 :</u>

Soit $\mathscr{E}$ *un espace affine sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* n .

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ *surjective et telle que*

si a, b, c *sont* 3 *points alignés quelconques de* $\mathscr{E}$

alors $f(a), f(b)$ *et* $f(c)$ *sont alignés, on a le résultat suivant :*

soit $\{a_i\}_{i=1,\ldots,k}$ *une famille affinement indépendante de* $\mathscr{E}$.

Alors la famille $\{f(a_i)\}_{i=1,\ldots,k}$ *est aussi affinement indépendante .*

Démonstration :

Par l'absurde : supposons que $\{f(a_i)\}_{i=1,\ldots,k}$ *ne soit pas affinement indépendante .*

Complétons $\{a_i\}_{i=1,\ldots,k}$ *pour avoir une base de* $\mathscr{E}$ *:* $\{a_i\}_{i=1,\ldots,n}$.

$\{f(a_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ *ne peut être une base de* $\mathscr{E}$ *et d'aprés le lemme* 3 *:*

$\mathscr{E} = f(\mathscr{E}) = f(\langle a_0, a_1 \ldots\ldots, a_n \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1) \ldots\ldots, f(a_n) \rangle \neq \mathscr{E}$ (**contradiction**)

car $\dim(\langle f(a_0), f(a_1) \ldots\ldots, f(a_n) \rangle) \neq n$ *donc* $< n$.

<u>Lemme 10 :</u>

Soit $\mathscr{E}$ *un espace affine sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* n .

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ *bijective et telle que*

si a, b, c *sont* 3 *points alignés quelconques de* $\mathscr{E}$

alors $f(a), f(b)$ *et* $f(c)$ *sont alignés, on a le résultat suivant :*

si $\mathscr{D}$ *est une droite affine de* $\mathscr{E}$, $f(\mathscr{D})$ *alors est une droite affine de* $\mathscr{E}$,

et f *est une bijection de* $\mathscr{D}$ *sur* $f(\mathscr{D})$.

Démonstration :

Une droite $\mathscr{D}$ *peut être considérée comme l'ensemble des barycentres construits à partir de* 2 *points* a *et* b *de* $\mathscr{D}$ *.Comme* $f(\langle a, b \rangle) \subseteq \langle f(a), f(b) \rangle$ (***<u>Lemme 3</u>***) *donc* $f(\mathscr{D})$ *est inclue dans une droite* $\mathscr{D}'$ *et* f *est une injection de* $\mathscr{D}$ *sur* $\mathscr{D}'$.

f est surjective. Soit $\boldsymbol{y} \in \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \rangle = \mathcal{D}'$, il existe $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.
*Si $\boldsymbol{x} \notin \mathcal{D}$ $\quad < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$ est affinement libre, d'aprés le **lemme 4** :*
*$< \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) >$ l'est aussi mais $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \in \mathcal{D}'$ (**contradiction**).*
Donc $\boldsymbol{f}$ est donc une surjection de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}' = \boldsymbol{f}(\mathcal{D})$ qui est donc une droite.

<u>Lemme 11 :</u>
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{K}$ de dimension $\boldsymbol{n}$.
Soit $\boldsymbol{f} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijective et telle que
*si **a, b, c** sont **3** points alignés quelconques de $\mathcal{E}$*
alors $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})$ sont alignés, on a le résultat suivant :

$$\mathcal{D} /\!/ \mathcal{D}' \Rightarrow \boldsymbol{f}(\mathcal{D}) /\!/ \boldsymbol{f}(\mathcal{D}').$$

Démonstration :
On peut supposer que $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$. Si $\boldsymbol{y} \in f(\mathcal{D}) \cap f(\mathcal{D}')$
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ avec $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ et $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{D}'$ ce qui est impossible
puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont distinctes et parallèles : $f(\mathcal{D}) \cap \boldsymbol{f}(\mathcal{D}') = \varnothing$
On peut décrire $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ comme :

$$\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{a_0} + \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{a_0 a_1}} / \lambda \in \mathbb{K} \right\} \text{ et } \mathcal{D}' = \left\{ \boldsymbol{a_2} + \mu \overrightarrow{\boldsymbol{a_2 a_3}} / \mu \in \mathbb{K} \right\} \text{ avec } \overrightarrow{\boldsymbol{a_0 a_1}} /\!/ \overrightarrow{\boldsymbol{a_2 a_3}}.$$

On a $\langle \mathcal{D}, \mathcal{D}' \rangle = \left\{ \boldsymbol{a_0} + \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{a_0 a_1}} + \mu \overrightarrow{\boldsymbol{a_0 a_2}} / \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \langle \boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \rangle.$
D'où :

$$\boldsymbol{dim}\left(\boldsymbol{f}\left(\langle \boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \rangle \right) \right) = \boldsymbol{dim}\left(\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_0}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_1}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_2}) \rangle \right) = \boldsymbol{2} \ (\textbf{lemme 4})$$

Or on peut décrire $f(\mathcal{D})$ et $\boldsymbol{f}(\mathcal{D}')$ comme :

$$\boldsymbol{f}(\mathcal{D}) = \left\{ \alpha_0 + \lambda \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_1} / \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \boldsymbol{f}(\mathcal{D}') = \left\{ \alpha_2 + \mu \overrightarrow{\alpha_2 \alpha_3} / \mu \in \mathbb{K} \right\}.$$

Si $\boldsymbol{f}(\mathcal{D})$ est $f(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles :

$$\langle \boldsymbol{f}(\mathcal{D}), \boldsymbol{f}(\mathcal{D}') \rangle = \left\{ \alpha_0 + \lambda \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_1} + \mu \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_2} + \nu \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_3} / \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{K}, \nu \in \mathbb{K} \right\}$$

*qui est de dimension **3**. Contradiction.*

<u>Lemme 12 :</u>
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\mathbb{K}$ de dimension $\boldsymbol{n}$.
Soit $\boldsymbol{f} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijective et telle que
*si **a, b, c** sont 3 points alignés quelconques de $\mathcal{E}$*
alors $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})$ sont alignés, on a le résultat suivant :
Soit $\boldsymbol{p} \in \mathcal{E}$, $\boldsymbol{\Phi} : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}$ où $\vec{\mathcal{E}}$ est l'espace vectoriel défini par le choix du point $\boldsymbol{p}$ comme origine dans $\mathcal{E}$ et définissons $\boldsymbol{\Phi}$ par :

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{w}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p} + \vec{\boldsymbol{w}}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \quad \forall \boldsymbol{w} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Alors $\boldsymbol{\Phi}$ est additive.

***Démonstration** :*
*(**1**) Soit $\vec{\boldsymbol{u}}$ et $\vec{\boldsymbol{v}}$ 2 vecteurs indépendants et **p, q, r, s** 4 points de $\mathcal{E}$ tels que*
$\boldsymbol{p} + \vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p} + \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{p} + \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r}$: on obtient un parallélogramme
*(**p, q, r, s**) de **4** points distincts avec $\overrightarrow{\boldsymbol{pq}} /\!/ \overrightarrow{\boldsymbol{sr}}$.*
*D'aprés le **lemme 6** $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}))$ forment un parallélogramme de **4** points distincts $(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}', \boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}')$.*
On rappelle la notation suivante : si le point $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \vec{\boldsymbol{x}}$, alors on peut noter $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ mais $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ n'a aucun sens.
On peut donc écrire que $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$, $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{p}$ et $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$.
Comme $\overrightarrow{\boldsymbol{p'q'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r's'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r'p'}} - \overrightarrow{\boldsymbol{s'p'}} \Rightarrow \quad \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{s}'$
$= (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{p}') - (\boldsymbol{s}' - \boldsymbol{p}') \ (\boldsymbol{a}),$

or $f(p+\vec{u}) = f(q) = q'$ *et* $f(p) = p'$ *d'où* **:**
$f(p+\vec{u}) - f(p) = q' - p' = \Phi(\vec{u})$ *de même :*
$\Phi(\vec{v}) = f(p+\vec{v}) - f(p) = f(s) - f(p) = s' - p'$ *,or*
$\Phi(\vec{u}+\vec{v}) = f(r) - f(p) = r' - p'$.
En appliquant (a) : $\Phi(\vec{u}) = \Phi(\vec{u}+\vec{v}) - \Phi(\vec{v})$ *et* Φ *est additive*.

(2) *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ 2 *vecteurs dépendants et non nuls .Soit* $\vec{w}$ *non colinéaire à* $\vec{u}$
(et donc à $\vec{v}$ *).D'aprés le cas précédent :*
$\Phi(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) = \Phi(\vec{u}+\vec{v}) + \Phi(\vec{w}) = \Phi(\vec{v}+\vec{w}) + \Phi(\vec{u})$ *,or*
$\Phi(\vec{v}+\vec{w}) = \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w})$ *donc :*
$\Phi(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) = \Phi(\vec{u}) + \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w})$
d'où $\Phi(\vec{u}) + \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w}) = \Phi(\vec{u}+\vec{v}) + \Phi(\vec{w})$, Φ *est encore additive*.

Remarque :
Soit $\mathscr{E}$ *un espace affine sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* n *. Soit* $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ *bijective*
et telle que si a, b, c *sont* 3 *points alignés quelconques de* $\mathscr{E}$
alors $f(a), f(b)$ *et* $f(c)$ *sont alignés ,*
alors comme $p + \mathbb{R}\vec{u}$ *est une droite* $\mathscr{D}$ *de direction* $\vec{u}$ *, passant par* p *,*
$f(p+\mathbb{R}\vec{u})$ *est aussi une droite* $\mathscr{D}'$ *(lemme* 5 *) , passant par* $p' = f(p)$ *et*
comme f *étant un bijection de* $\mathscr{D}$ *sur* $\mathscr{D}'$ *, par définition de* Φ *(lemme 7) :*
$\Phi(\lambda\vec{u}) = f(p+\lambda\vec{u}) - f(p) \quad \forall\lambda \in \mathbb{K}$,
$f(\mathscr{D}) = f(p+\mathbb{R}\vec{u}) = f(p) + \Phi(\mathbb{R}\vec{u}) = \mathscr{D}' = p' + \mathbb{R}\Phi(\vec{u})$ *puisque*
une droite a une seule direction définie par un vecteur , à un scalaire près.

Lemme 13 :
Si on définit l'application $\theta_{\vec{u}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\forall \vec{u} \neq 0$ *par :*
$\forall\lambda \in \mathbb{K} \quad \Phi(\lambda\vec{u}) = \theta_{\vec{u}}(\lambda)\Phi(\vec{u})$,
Alors on a $\theta_{\vec{u}} = \theta_{\vec{v}} \ \forall \vec{u} \neq 0 , \forall \vec{v} \neq 0$.
Démonstration *:*
(1) *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ 2 *vecteurs indépendants* $\forall\lambda \in \mathbb{K}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda(\vec{u}+\vec{v})) &= \Phi(\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}) = \Phi(\lambda\vec{u}) + \Phi(\lambda\vec{v}) \quad (\text{ lemme } 7)\\
&= \theta_{\vec{u}}(\lambda)\Phi(\vec{u}) + \theta_{\vec{v}}(\lambda)\Phi(\vec{v})\\
&= \theta_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)\Phi(\vec{u}+\vec{v})\\
&= \theta_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)\Phi(\vec{u}) + \theta_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)\Phi(\vec{v}) \text{ . Donc :}
\end{aligned}$$

$$\forall\lambda \in \mathbb{K} \ \Phi(\vec{u})\left(\theta_{\vec{u}}(\lambda) - \theta_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)\right) + \Phi(\vec{v})\left(\theta_{\vec{v}}(\lambda) - \theta_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)\right) = \vec{0}$$

Or $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont* 2 *vecteurs indépendants, ce qui implique que*
$f(p+\vec{u})$ *et* $f(p+\vec{v})$ *sont* 2 *points affinement indépendants(lemme* 4 *) et*
$\Phi(\vec{u})$ **et** $\Phi(\vec{v})$ *sont 2 vecteurs indépendants , ce qui implique que :*

$$\forall\lambda \in \mathbb{K} \quad \theta_{\vec{u}}(\lambda) - \theta_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda) = \theta_{\vec{v}}(\lambda) - \theta_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda) = 0 \text{ et donc :}$$

$$\theta_{\vec{u}} = \theta_{\vec{u}+\vec{v}} = \theta_{\vec{v}} \ .$$

(2) *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ 2 *vecteurs liés , on considére* $\vec{w}$ *un vecteur indépendant*

$\forall \vec{u} \neq 0$, **posons** $\theta = \theta_{\vec{u}}$ *la valeur commune.*

Autrement dit $\forall \lambda \in \mathbb{K} \;\; \Phi(\lambda \vec{u}) = \theta(\lambda)\Phi(\vec{u})$

Alors θ *est un automorphisme de* $\mathbb{K}$.

Démonstration *:*

Si $\Phi(\vec{w}) = f(p+\vec{w}) - f(p) \;\; \forall w \in \vec{\mathcal{E}}$ *on a :*

$\Phi(\vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow f(p+\vec{w}) = f(p) \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$ *, f étant bijective.*

$\forall \vec{u} \neq 0 \quad \Phi((\lambda+\mu)\vec{u}) = \theta(\lambda+\mu)\Phi(\vec{u}) = \Phi(\lambda\vec{u}) + \Phi(\mu\vec{u})$

$= (\theta(\lambda) + \theta(\mu))\Phi(\vec{u})$ *donc* $(\theta(\lambda+\mu) - (\theta(\lambda)+\theta(\mu)))\Phi(\vec{u}) = \vec{0}$

donc $\theta(\lambda+\mu) = \theta(\lambda) + \theta(\mu)$ *de même :*

$\forall \vec{u} \neq 0 \quad \Phi((\lambda\cdot\mu)\vec{u}) = \theta(\lambda\cdot\mu)\Phi(\vec{u}) = \theta(\lambda)\Phi(\mu\vec{u}) = \theta(\lambda)\theta(\mu)\Phi(\vec{u})$

donc $(\theta(\lambda\cdot\mu) - \theta(\lambda)\cdot\theta(\mu))\Phi(\vec{u}) = \vec{0}$

d'où $\theta(\lambda\cdot\mu) = \theta(\lambda)\cdot\theta(\mu)$.

<u>Lemme 15 :</u>

(*P • Boyer*."Algèbre et Géométries" . *C&M 2015* .)

Soit $\mathcal{E}$ *un espace affine sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* n *. Soit* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *bijective et telle que si* a, b, c *sont 3 points alignés quelconques de* $\mathcal{E}$ *cela entraine que* $f(a), f(b)$ *et* $f(c)$ *sont alignés alors si* Φ *est définie par :*

$\Phi(\vec{w}) = f(p+\vec{w}) - f(p) \;\; \forall w \in \vec{\mathcal{E}}$, Φ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire.*

Démonstration *:*

Par le lemme 7 Φ *est additive, par le lemme* ***9 :***

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \Phi(\lambda\vec{u}) = \theta(\lambda)\Phi(\vec{u})$ *avec* θ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}$ *,*

par le ***lemme 1*** *:* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\theta(\lambda) = \lambda$ *d'où le résultat.*

<u>Conséquence :</u>

Si une transformation bijective T *d'un espace vectoriel* E *dans un espace vectoriel* E' *, telle que* $T(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_{E'}}$, *transforme les droites affines de* E *en des droites affines de* E' *alors* T *est linéaire.*

Remarques : *Dans le cas* T *où est un opérateur de changement de repère :*

Si T *est linéaire de* E *dans* E' *,* ***2*** *espaces vectoriels de même dimension, et transforme les droites vectorielles en droites vectorielles alors* T *est bijective :*

Si $Ker(T) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$ *, il contient une droite qui se transforme en* ***1*** *point !*

Comme E *et* E' *ont même dimension l'injectivité entraine la bijectivité.*

On peut résumer cela en :

Si T *une application de* E *dans* E' *,* ***2*** *espaces vectoriels de même dimension, telle que* $T(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_{E'}}$, *transforme les droites affines de* E *en des droites affines de* E' *alors on a l'équivalence :* T *bijective* $\Leftrightarrow$ T *linéaire .*

Si on admet que si ***2*** *événements coïncidants dans un référentiel sont aussi coïncidants dans tout autre référentiel (par exemple un choc entre* ***2*** *particules examiné dans un référentiel donné est aussi un choc dans tout autre référentiel), alors* $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$ *et* T *est injective .*

Si on admet que tout espace vectoriel E *de dimension* ***4*** *attaché à un observateur est vu par un autre observateur, grâce à* T *, comme un espace de même nature, i·e* $T(E)$ *est un espace vectoriel de dimension* ***4*** *et comme* $T(E) \subseteq E'$, en remarquant qu'une base de $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E})$ est une partie libre maximale de $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E})$ et aussi de $\boldsymbol{E}'$ puisque $\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{E}') = \boldsymbol{4}$ et aussi une base de $\boldsymbol{E}'$ et donc $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{T}$ est surjectif.

Donc en admettant les **2** hypothèses ci-dessus $\boldsymbol{T}$ est bijectif.

$\boldsymbol{T}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{E}}}\right) = \overrightarrow{\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{E}'}}$ a lieu si on admet que les trajectoires de $\boldsymbol{O}$ et $\boldsymbol{O}'$ se coupent et à cet instant on synchronise les **2** horloges : $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}' = \boldsymbol{0}$.

Chaptre III :
Etudes des cônes d'isotropie .

(*J. Dieudonné.*"Eléments d'analyse " •*Gauthier − villars 1969* •
J-M. Monier."Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997* .
J •Grifone."Algèbre Linéaire" •*Cépaduès éditions 2002* .)

Remarque : *Dans une première lecture , on pourra se contenter du lemme* **10** *•Le but des autres lemmes est de montrer que ce lemme* **10** *est un cas particuler de l'étude des cônes d'isotropie invariants.*

Lemme 1 :

Soient f *et* g **2** *formes linéaires définies sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie .*

On a l'équivalence : $Ker(f) = ker(g) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ f = \lambda g$.

Démonstration :

On peut supposer $f \neq 0$ *et* $g \neq 0$.

$(1)\, Ker(f) = ker(g) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ f = \lambda g$.

Si $H = Ker(f) = ker(g) \subsetneq E$

alors $E = \mathbb{K}x_0 \oplus H$, *avec* $x_0 \neq 0, x_0 \notin H$.

$$\forall x \in \mathbb{E}\ x = x_1 + \mu x_0 , x_1 \in H .$$

On a $f(x) = \mu . f(x_0)$ *et* $g(x) = \mu . g(x_0)$ *d'où*

$$\forall x \notin H \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \Rightarrow f(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x)$$

$(2)\ \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ f = \lambda g \Rightarrow Ker(f) = Ker(g)$.

Immédiat .

Lemme 2 :

Si **2** *équations polynomiales de degré* $n > 0$, *avec n racines , ont des coefficients proportionnels alors elles ont les mêmes racines et réciproquement .*

Démonstration :

La partie directe est immédiate . Réciproquement , il suffit de factoriser les 2 équations : comme $a_n \neq 0$ *et* $b_n \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) = 0 , \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = b_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) = 0 \ \text{ et donc :}$$

$$a_k = \frac{a_n\, b_k}{b_n} \quad , \ \forall k = 0 \ldots n .$$

Lemme 3 :

Le complémentaire de l'intérieur d'une partie A *d'un ensemble topologique* E *est égale à l'adhérence du complémentaire de* A : $E \setminus \overset{o}{A} = \overline{E \setminus A}$.

Démonstration :

$\overset{o}{A}$ *est le plus grand ouvert inclu dans* A *donc* $E \setminus \overset{o}{A}$ *est le plus petit fermé contenant* $E \setminus A$ *d'où le résultat* .

Lemme 4 :

Soient f et g 2 applications continues d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d').

Si $f(x) = g(x)$ $\forall x \in B \subseteq E$ tel que $\overline{B} = E$ alors $f = g$.

Démonstration :

Montrons que $A = \{x \in E / f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E i.e. $E \setminus A$ est ouvert dans E. Soit $a \in E \setminus A$, $f(a) \neq g(a)$ et donc $d'(f(a), g(a)) = \alpha > 0$.

f et g étant continues il existe un voisinage V de a tel que pour tout x de V on ait $d'(f(x), f(a)) < \dfrac{\alpha}{2}$ et $d'(g(x), g(a)) < \dfrac{\alpha}{2}$.

S'il existait $x \in V$ tel que $f(x) = g(x)$ alors :

$$\alpha = d'(f(a), g(a)) \leq d'(f(x), f(a)) + d'(g(x), g(a)) < \alpha :$$

***contradiction** !*

Donc $\forall x \in V$ $f(x) \neq g(x)$ et $E \setminus A$ est ouvert et A est fermé dans E.

On a $B \subseteq A \subseteq E$ donc $\overline{B} = E \subseteq \overline{A} = A \subseteq E$ et donc $A = E$.

Lemme 5 :

(1) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n alors tout sous-espace vectoriel V strict est d'intérieur vide et son complémentaire dans E est dense dans E.

(2) Tout sous-espace vectoriel V est fermé pour E.

(3) Soit $\Phi \neq 0$ une forme quadratique sur E, $\mathcal{C}(\Phi) = \{x \in E / \Phi(x) = 0\}$ qui un cône de E, le cône d'isotropie de Φ, est un fermé d'intérieur vide.

(4) Soient f une fonction définie sur E, nulle sur le complémentaire d'un sous-espace vectoriel V strict, alors elle est nulle partout.

Démonstration :

(1) Si V n'était pas d'intérieur vide dans E : $\exists x \in V, \exists B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq V$.

Comme V est un espace vectoriel $\forall \lambda > 0$ $\lambda B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq V$ et donc $E \subseteq V$, impossible puisque V est un sous-espace strict de E.

Donc $\overset{o}{V} = \varnothing$ et donc, d'aprés le lemme 3, $E \setminus \overset{o}{V} = \overline{E \setminus V} = E$.

(2) Il faut montrer que toute suite convergente de V, converge vers un point de V.

Soit (x_n) une suite convergente de V donc de E. Soit $(e_i)_{i=1,..,p}$ une base de V que l'on peut compléter par $(e_i)_{i=p+1,..,n}$ pour obtenir une base de E.

Dire qu'une suite converge dans un espace E vers x, c'est dire que chaque composante des termes de la suite converge.

Si les termes sont dans V, les composantes selon $(e_i)_{i=p+1,..,n}$ seront constamment nulles et donc leur limite x aussi et x appartiendra bien à V.

(3) $\mathcal{C}(\Phi) = \Phi^{-1}(\{0\})$ est fermé car Φ est continue. Si l'intérieur de $\mathcal{C}(\Phi) \neq \varnothing$

il existe $x \in \mathcal{C}(\Phi)$ et, il existe $B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$ qui est un cône,

donc $\forall \lambda > 0$ $\lambda B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$ et donc $E \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$ impossible car $\Phi \neq 0$.

(4) E étant de dimension finie, f est continue et, d'après ce qui précède, nulle sur un sous-ensemble dense de E donc nulle partout d'aprés le lemme **4**.

Lemme 6 :

Si O_1 et O_2 sont **2** ouverts denses dans un espace topologique E, alors $O_1 \cap O_2$ est encore dense dans E.

Démonstration :

On a la caractérisation évidente si E est un espace topologique, $A \subseteq E$:

$\overline{A} = E \Leftrightarrow \forall \Omega, \Omega$ **ouvert de E,** $\Omega \cap A \neq \emptyset$.

Soit donc Ω ouvert de E, on a $\Omega \cap O_1 \neq \emptyset$. Soit $a_1 \in \Omega \cap O_1$,

comme $\Omega \cap O_1$ est un ouvert, il existe une boule $B(a_1, \varepsilon) \subseteq \Omega \cap O_1$,

alors $B(a_1, \varepsilon) \cap O_2 \neq \emptyset$. Soit $a_2 \in B(a_1, \varepsilon) \cap O_2$:

$a_2 \in O_2$, $a_2 \in B(a_1, \varepsilon)$,

donc $a_2 \in \Omega \cap O_1$, et $a_2 \in \Omega \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Notations :

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$,

Φ une forme quadratique sur E et φ la forme bilinéaire associée.

Soit F un sous-espace vectoriel de E ; on note :

$F^{\perp_\varphi} = \{x \in E / \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\}$ qui un s.e.v de E,

$Ker(\Phi) = E^{\perp_\varphi} \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$,

$x^{\perp_\varphi} = = \{y \in E / \varphi(x, y) = 0\}$ qui est un sous-espace vectoiel de E, strict si $\Phi \neq 0$.

Théorème 1 :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie,

(α) Soit $\Phi \neq 0$ une forme quadratique sur E telle que $E^{\perp_\varphi} \neq \mathcal{C}(\Phi)$

c'est à dire $\{0\} \subset E^{\perp_\varphi} \subsetneqq \mathcal{C}(\Phi) \subsetneqq E$. (1)

Soit Φ' une autre forme quadratique.

Pour que $\Phi' = \lambda\Phi$ avec $\lambda \neq 0$, Il faut et il suffit que $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$.

(β) Si $\Phi = 0$ et $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ alors $\Phi' = 0$.

Démonstration :

(α) On notera φ et φ' les formes bilinéaires associées à Φ et Φ'.

Si $\Phi' = \lambda\Phi$ **avec** $\lambda \neq 0$, il est immédiat que $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$ et $E^{\perp_\varphi} = E^{\perp_{\varphi'}}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathcal{C}(\Phi) \setminus E^{\perp_\varphi}$: comme $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$,

$\Phi(x) = 0 = \Phi'(x)$, de plus $\exists y \neq 0$ tel que $\varphi(x, y) \neq 0$ i.e. $y \notin x^{\perp_\varphi}$ qui est un sous-espaces stric de E. D'après le lemme **5** :

$x^{\perp_\varphi}$ *est un fermé d'intérieur vide , de même* $\mathcal{C}(\Phi)$,

d'où $U = E \setminus \left(x^{\perp_\varphi} \cup \mathcal{C}(\Phi)\right)$ *est d'après le* ***lemme 6***
un ouvert dense non vide de E .

Soit $y \in U : \Phi(y) \neq 0,\ \varphi(x, y) \neq 0.$

Soit $x + ty$ *avec* $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = 0$, $\Phi(y) \neq 0$; *déterminons les ensembles :*
$\{ t \in \mathbb{R} / \Phi(x + ty) = 0\}$ *et* $\{t \in \mathbb{R} / \Phi'(x + ty) = 0\}$.

On a :

$$\Psi(t) = \Phi(x + ty) = \Phi(x) + t\varphi(x, y) + t^2\Phi(y) + t\varphi(y, x)$$
$$= t^2\Phi(y) + 2\,t\varphi(x, y) = t(t\Phi(y) + 2\,\varphi(x, y))\ (1)$$

de même $\Psi'(t) = t^2\Phi'(y) + 2\,t\varphi'(x, y)\ \ (2)$.

Comme $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ *alors* $\Psi(t) = 0 \Rightarrow \Psi'(t) = 0$.

(1) *et* (2) *sont* **2** *équations de degré* **2** *ayant les mêmes racines distinctes* **:**

$t_1 = 0$ *qui correspond à* $z_1 = x$, $t_2 = -\dfrac{2\,\varphi(x, y)}{\Phi(y)} \neq 0$ *qui correspond à*

$z_2 = x - \dfrac{2\,\varphi(x, y)}{\Phi(y)}\,y \neq z_1$.*Ce qui implique que* $\Phi'(y) \neq 0$ *et* $\varphi'(x, y) \neq 0$ *et que*
les coefficients de (1) *et* (2) *sont proportionnels d'aprés le* ***lemme 2*** *:*

$\Phi(y) = \lambda\,\Phi'(y)$ (3) *et* $\varphi(x, y) = \lambda\,\varphi'(x, y)$ (4),

le paramètre λ *d'après* (3) *est un réel non nul qui ne dépend que de* $y : \lambda = \lambda(y)$.

Considérons les formes linéaires $\varphi(x, \bullet)$ *et* $\varphi'(x, \bullet)$

elles vérifient $\varphi(x, \bullet) = \lambda(\bullet)\,\varphi'(x, \bullet)$, *elles ont mêmes noyaux puisque* $\lambda(\bullet) \neq 0$.

D'aprés le ***lemme 1*** *elle sont proportionnelles :*

$\exists\, \mu \neq 0$ *tel que* $\varphi(x, \bullet) = \mu\,\varphi'(x, \bullet)$, *avec* $\mu = \mu(x)$ (5).

En rapprochant (4) *et* (5) *:*

$\varphi(x, y) = \lambda(y)\,\varphi'(x, y) = \mu(x)\varphi'(x, y)$ *il vient que :*

$\lambda(y) = \mu(x) = k$, k *étant une contante indépendantes de* x *et* y .

On en déduit que **:**

$\Phi(y) = k\,\Phi'(y)$, $\forall y \in E \setminus \left(\mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp_\varphi}\right)$ (6) .

Et d'aprés le ***lemme 4*** , $\Phi(y) = k\,\Phi'(y)$ $\forall y \in E$

puique Φ *et* Φ' *sont continues et* $\left(\mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp_\varphi}\right)$ *est d'intéreur vide .*

(β) *Si* $\Phi = 0$ *alors* $\mathcal{C}(\Phi) = E$ *et donc* $\mathcal{C}(\Phi') = E$ *et* $\Phi' = 0$.

Remarque : *L'hypothèse* $\mathcal{C}(\Phi) \neq E^{\perp_\varphi}$ *est essentielle :*

Si l'on considère dans $E = \mathbb{R}^3$, $\Phi([x, y, z]) = x^2 + y^2$ *et* $\Phi'([x, y, z]) = x^2 + 2\,y^2$,
on a bien : $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi') = \{[x, y, z] / x = y = 0\}$ *qui est une droite ,*

et $\mathcal{C}(\Phi) = E^{\perp_\varphi}$ *mais* Φ *et* Φ' *ne sont pas proportionnelles .*

Il est facile de voir en utilisant le théorème que :

$$\left(\Phi \neq 0,\ \mathcal{C}(\Phi) \neq E^{\perp_\varphi}\ \text{et}\ \mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')\right) \Rightarrow E^{\perp_\varphi} = E^{\perp_{\varphi'}}.$$

Si le corps de base est $\mathbb{C}$ *on a le théorème suivant qui supprime l'hypothèse*
$\mathcal{C}(\Phi) \neq E^{\perp_\varphi}$.

Théorème 2 :

Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *de dimension finie,*
$\boldsymbol{\Phi}$ ***et*** $\boldsymbol{\Phi'}$ ***2*** *formes quadratiques sur* $\boldsymbol{E}$.
Pour que $\boldsymbol{\Phi'} = \lambda \boldsymbol{\Phi}$ *avec* $\lambda \neq 0$ *, Il faut et il suffit que*
$\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$.

Démonstration :

(1) *Si* $\Phi = 0$ *alors* $\mathcal{C}(\Phi) = E$ *et donc* $\mathcal{C}(\Phi') = E$ *et* $\Phi' = 0$.
(2) *Si* $\Phi \neq 0$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $\Phi(x) \neq 0$ *c'est à dire que* $x \notin \mathcal{C}(\Phi)$,
donc $x \notin E^{\perp_\varphi}$ *et* $x^{\perp_\varphi} \neq E$ *et* $E \setminus x^{\perp_\varphi} \neq \varnothing$ *et un ouvert dense non vide de* E.
De même $E \setminus \mathcal{C}(\Phi)$ *et* $E \setminus \left(\mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp_\varphi} \right)$.
Soit $y \notin \mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp_\varphi}$ *et* $z \in \mathbb{C}$ *et considérons :*
$(a)\ P(z) = \Phi(y + zx) = z^2 \Phi(x) + 2 z\varphi(x, y) + \Phi(y)$ *et*
$(b)\ Q(z) = \Phi'(y + zx) = z^2 \Phi'(x) + 2 z\varphi'(x, y) + \Phi'(y)$.
Considérons l'équation $P(z) = 0$ *c'est une équation du second degré dans* $\mathbb{C}$ *:*
d'où l'existence de **2** *racines , que l'on retrouve exactement dans* (b) *puisque*
$\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$.
Ce qui implique que $\Phi'(y) \neq 0$ *et* $\varphi'(x, y) \neq 0$ *et que*
les coefficients de (a) *et* (b) *sont proportionnels d'aprés le* ***lemme 2*** *:*
$\Phi(x) = \lambda\, \Phi'(x) \qquad (c)$ *et* $\qquad \varphi(x, y) = \lambda\, \varphi'(x, y) \quad (d)$.
On conclut comme dans le ***théorème 1*** .

Lemme 7 :

Soit un plan vectoriel Π *sur un corps* $\mathbb{K}$ *,* Φ *une forme quadratique définie sur* Π,
et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *une base* $\boldsymbol{\Phi}$ ***− orthogonale*** *de* Π.
Dans ce plan Π *il ya au plus* **2** *droites isotropes sinon c'est tout le plan qui est isotrope .*

Démonstration :

Soit φ *la forme bilinéaire symétrique associée à* Φ.
Dans la base $\mathcal{B}$ *la matrice de φ s'écrit* $(\varphi)_{1,1} = q_1$, $(\varphi)_{1,2} = q_2$, $(\varphi)_{1,2} = 0$.
Soit r le rang de $\Phi = 2 - \dim\left(\Pi^{\perp_\varphi} \right)$.
Si $r = 0$ *,* $q_1 = 0 = q_2$ *et* $\Pi^{\perp_\varphi} = \mathcal{C}(\Phi) = \Pi$.
Si $r = 1$ *, l'un des* **2** *scalaires* q_1 *ou* q_2 *est nul , l'autre non , par exemple :*
$q_1 \neq 0$ *et* $q_2 = 0$.
On a $\Pi^{\perp_\varphi} = \mathcal{C}(\Phi) = \mathbb{K}e_2$ *et comme* $\Phi(x) = q_1 \cdot x_1^2$ *avec* ${}^t(x) = (x_1, x_2)$,
toute autre droite vectorielle privée de $\{0\}$*, autre que* $\mathbb{K}e_2$ *n'appartient pas à* $\mathcal{C}(\Phi)$ *donc il y a au plus une droite isotrope dans* Π.
Si $r = 2$ *, c'est à dire que* $q_1 \cdot q_2 \neq 0$ *et* $\Phi(x) = q_1 \cdot x_1^2 + q_2 \cdot x_2^2$.
De $q_1 \cdot x_1^2 + q_2 \cdot x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \dfrac{q_2}{q_1} \cdot x_2^2 = 0$ *on a :*

ou bien : $\dfrac{q_2}{q_1} > 0$ *alors* $x = 0$ *est la seule solution et il n'y a pas de droite isotrope ,*

ou bien : $\dfrac{q_2}{q_1} < 0$ *alors si on pose* $-\dfrac{q_2}{q_1} = \alpha^2$ *on a :*

$x_1{}^2 - \alpha^2 \cdot x_2{}^2 = (x_1 - \alpha \cdot x_2) \cdot (x_1 + \alpha \cdot x_2) = 0$ *montre l'existence de exactement* **2** *droites isotropes .*

Lemme 8 :

Soit un plan vectoriel Π *sur un corps* $\mathbb{K}$ *fini de caractéristique différente de* **2** *,*
alors il possède au moins **4** *droites vectorielles distinctes .*

Démonstration :

La caractéristique d'un corps $\mathbb{K}$ *fini étant le plus petit entier* $n > 0$ *tel que :* $n \cdot 1 = 0,$
et tout corps fini a pour caractéristique un nombre premier,
et pour cardinal une puissance de ce nombre.
Si $\mathbb{K}$ *es un corps fini de caractéristique différente de* **2** *, il a au moins* **3** *éléments .*
Soit un plan vectoriel Π *sur un corps* $\mathbb{K}$ *fini de caractéristique différente de 2 ,*
il posséde une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *et soit* $\mathbb{F}_3$ *le corps à 3 éléments* $\{0, 1, 2\}$*,*

les droites de Π *seront de la forme* (xe_1, ye_2) *avec x et y éléments non nul de* $\mathbb{F}_3$ *:*

d'où l'existence d'au moins **4** *droites vectorielles définies par les scalaires :*
(1) $x = y$, (2) $x = 0, y = 1$ **ou** 2 , (3) $y = 0$, $x = 1,$ *ou* 2 , (4) $x = 1, y = 2$ *ou* $x = 2, y = 1$
car $e_1 + 2e_2 = 2(2e_1 + e_2)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$.

Plus généralement si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ *avec* $p > 2$ *, on aura au moins les* **4** *droites* $x = y$ *,* $x = 0, y = 0$ *et* $y = 2x$.

Théorème 3 :

(*R.Goblot* ."Algébre linéaire "*Masson 1995*).
Soit E *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps* $\mathbb{K}$
de caractéristique différente de 2 **.**

(α) *Soit* $\Phi \neq 0$ *une forme quadratique sur* E *telle que* $E^{\perp_\varphi} \neq \mathcal{C}(\Phi)$ *,*

c'est à dire $\{0\} \subset E^{\perp_\varphi} \subsetneqq \mathcal{C}(\Phi) \subsetneqq E$ **.** (1)

Soit Φ' *une autre forme quadratique* **.**
Pour que $\Phi' = \lambda\Phi$ *avec* $\lambda \neq 0$ **,** *Il faut et il suffit que*
$\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$.
(β) *Si* $\Phi = 0$ *et* $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ *alors* $\Phi' = 0$.

Démonstration :

(α) *On notera* φ *et* φ' *les formes bilinéaires associées à* Φ *et* Φ' .

Si $\Phi' = \lambda\Phi$ **avec** $\lambda \neq 0,$ *il est immédiat que* $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$ *et* $E^{\perp_\varphi} = E^{\perp_{\varphi'}}$.

Réciproquement , soit $x \in \mathcal{C}(\Phi) \setminus E^{\perp_\varphi}$ *: comme* $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ *,*
$\Phi(x) = 0 = \Phi'(x)$ **,** *de plus* $\exists\, y \neq 0$ *tel que* $\varphi(x, y) \neq 0$.
Supposons d'abord que y *soit , en plus , tel que* $\Phi(y) \neq 0$ **.**
Soit $x + ty$ *avec* $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = 0$, $\Phi(y) \neq 0$*; déterminons les ensembles :*

$\{ t \in \mathbb{R} / \Phi(x + ty) = 0 \}$ *et* $\{ t \in \mathbb{R} / \Phi'(x + ty) = 0 \}$.

On a :

$$\Psi(t) = \Phi(x + ty) = \Phi(x) + t\varphi(x,y) + t^2\Phi(y) + t\varphi(y,x)$$
$$= t^2\Phi(y) + 2\,t\varphi(x,y) = t(t\Phi(y) + 2\,\varphi(x,y))\ (1)$$

de même $\Psi'(t) = t^2\Phi'(y) + 2\,t\varphi'(x,y)$ (2).

Comme $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ *alors* $\Psi(t) = 0 \Rightarrow \Psi'(t) = 0$.

(1) *et* (2) *sont* 2 *équations de degré* 2 *ayant les mêmes racines distinctes* **:**

$t_1 = 0$ *qui correspond à* $z_1 = x$, $t_2 = -\dfrac{2\,\varphi(x,y)}{\Phi(y)} \neq 0$ *qui correspond à*

$z_2 = x - \dfrac{2\,\varphi(x,y)}{\Phi(y)}y \neq z_1$.*Ce qui implique que* $\Phi'(y) \neq 0$ *et* $\varphi'(x,y) \neq 0$ *et que les coefficients de* (1) *et* (2) *sont proportionnels d'aprés le* ***lemme 2*** *:*

$\Phi(y) = \lambda\,\Phi'(y)$ (3) *et* $\varphi(x,y) = \lambda\,\varphi'(x,y)$ (4),

le paramètre λ *d'après* (3) *est un réel non nul qui ne dépend que de* y **:** $\lambda = \lambda(y)$.

Considérons les formes linéaires $\varphi(x,\cdot)$ *et* $\varphi'(x,\cdot)$

elles vérifient $\varphi(x,\cdot) = \lambda(\cdot)\,\varphi'(x,\cdot)$, *elles ont mêmes noyaux puisque* $\lambda(\cdot) \neq 0$.

D'aprés le lemme **1** *elle sont proportionnelles :*

$\exists\, \mu \neq 0$ *tel que* $\varphi(x,\cdot) = \mu\,\varphi'(x,\cdot)$, *avec* $\mu = \mu(x)$ (5).

En rapprochant (4) *et* (5) *:*

$\varphi(x,y) = \lambda(y)\,\varphi'(x,y) = \mu(x)\varphi'(x,y)$ *il vient que :*

$\lambda(y) = \mu(x) = k$, k *étant une constante indépendantes de* x *et* y .

Donc $\Phi' = \lambda\Phi$ *avec* $\lambda \neq 0$ *sur* $E \setminus \left(\mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp_\varphi} \right)$.

Si $\Phi(y) = 0$ *alors* $\Phi'(y) = 0$ *et* $\Phi' = \lambda\Phi$ *aussi sur* $\{ y / \Phi(y) = 0 \}$.

On vient donc de montrer que $\Phi' - \lambda\Phi = 0$ *sur* $E \setminus x^{\perp_\varphi}$.

Si $x^{\perp_\varphi} = \{0\}$ *le théorème est démontré .*

Supposons maintenant que $x^{\perp_\varphi} \neq \{0\}$.*Et comme* $\exists\, y \neq 0$ *tel que* $\varphi(x,y) \neq 0$ **:**

$\dim\left(x^{\perp_\varphi}\right) = \dim(E) - 1$. *Montrons que :*

$\Phi' - \lambda\Phi = 0$ *aussi sur* $x^{\perp_\varphi} = Ker(\varphi(x,\cdot)) = Ker(\varphi'(x,\cdot))$.

Le théorème est trivial si $\dim(E) = 1$.*Considérons le cas* $\dim(E) = 2$ **:**

D'aprés ce qui précéde $\dim\left(x^{\perp_\varphi}\right) = 1$ .E *étant un plan vectoriel , toute droite vectorielle de ce plan , sauf peut − être* $x^{\perp_\varphi}$, *est isotrope pour* $\Phi' - \lambda\Phi$ *car contenue dans* $E \setminus x^{\perp_\varphi} \cup \{0\}$.

D'aprés les lemmes **8** *et 7* E *tout entier est isotrope pour* $\Phi' - \lambda\Phi$.

Considérons maintenant le cas $\dim(E) > 2$ **:**

Soit $z \in x^{\perp_\varphi}$ *qui est un hyperplan et* Π *un plan vectoriel contenant* z *et non contenu dans* $x^{\perp_\varphi}$, *c'est un plan engendré par* z *et un autre vecteur* $v \notin x^{\perp_\varphi}$. *On a* ***évidemment*** $\Pi \cap x^{\perp_\varphi} = \mathbb{K}z$.

Toute droite vectorielle de Π , *sauf peut − être* $\mathbb{K}z$, *est isotrope pour* $\Phi' - \lambda\Phi$.

D'aprés les lemmes **8** *et 7* E *est isotrope pour* $\Phi' - \lambda\Phi$.

(β) *Si* $\Phi = 0$ *alors* $\mathcal{C}(\Phi) = E$ *et donc* $\mathcal{C}(\Phi') = E$ *et* $\Phi' = 0$.

Remarque :

Dans le cas particulier où $\mathbf{dim}(E) = n \geq 2$ *et* $\Phi(x) = (x_1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (x_i)^2$, *on peut utiliser une démonstration de type calcul matriciel qui a l'avantage d'être rapide et astucieuse mais a l'inconvénient de cacher sa vraie nature .*

Notation : *On note* $M_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices réelles d'ordre* n , $M_{n,1}(\mathbb{R})$ *les matrices colonnes d'ordre* **n**, ^{t} *la transposition .*

Lemme 9: *Soit* $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ *.On a l'équivalence :*

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad {}^tXAY = {}^tXBY \quad \Leftrightarrow \quad A = B \quad .$$

Démonstration :

On remarque que : si pour $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tXY = 0$ *alors* $Y = 0$,

si pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ${}^tXY = 0$ *alors* $X = 0$.

Il suffit de prendre $X = Y$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad {}^tXAY = {}^tXBY \Leftrightarrow {}^tX(A - B)Y = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ (A - B)Y = 0 \ \Leftrightarrow \ (A - B) = 0 \ .$$

Corollaire : *Si de plus* A *et* B *sont symétriques on a l'équivalence :*

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX = {}^tXBX \quad \Leftrightarrow \quad A = B \quad .$$

En particulier $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Démonstration :

Comme ${}^tXAX = {}^tXBX$ *on a :*

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 \ \ {}^tXAX = {}^tXBX \ \ (1) , \ {}^tYAY = {}^tYBY \ \ (2) ,$$

$${}^t(X + Y)A(X + Y) = {}^t(X + Y)B(X + Y) \quad (3) \ .$$

(3) *se développe en :*

$${}^tXAX + {}^tXAY + {}^tYAX + {}^tYAY = {}^tXBX + {}^tXBY + {}^tYBX + {}^tYBY ,$$

en applicant (1) *et* (2) *il vient :*

$${}^tXAY + {}^tYAX = {}^tXBY + {}^tYBX ,$$

et comme A et B sont des matrices symétriques :

$A = {}^tA$ *et* $B = {}^tB$, *donc comme* ${}^t({}^tXAY) = {}^tXAY \in \mathbb{R}$ *d'où :*

${}^tYAX = {}^tXAY$ *de même :* ${}^tYBX = {}^tXBY$ *d'où :*

$${}^tXAY = {}^tXBY \quad \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 .$$

D'aprés le lemme précédent : $A = B$.

Autre démonstration possible du corollaire :

$C = A - B$ *est symétrique telle que :* ${}^tXCX = 0 \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

la symétrie implique l'existence de $P \in M_n(\mathbb{R})$ *orthogonale telle que* $PCP^t = D$

$= (d_i)$ *matrice diagonale .*

$${}^tXCX = 0 \ \Leftrightarrow \ {}^tX(P^tDP)X = 0 \ \Leftrightarrow \ {}^tZDZ = 0 \quad \text{avec } Z = PX .$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} d_i (Z^i)^2 = 0 \quad \forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

donc en particulier pour $Z = {}^t(0,\dots, d_i, \dots)$, d_i *en* i *− ième position ,*
d'où $D = 0$ *et* $C = 0$.

<u>Lemme 10 :</u>

(*N.M.J. Woodhouse*. " Special Relativity " •*Springer 2002* .)

Soit $M \in M_4(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique et* $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

On suppose que M *vérifie :* $\forall X \ : \ {}^tXGX = 0 \Rightarrow {}^tXMX = 0$,
alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $M = \alpha G$.

Démonstration :

Si M *est symétrique on peut écrire* M *sous la forme :*

$M = \begin{bmatrix} \alpha & {}^ta \\ a & S \end{bmatrix}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $S \in M_3(\mathbb{R})$ S *symétrique* .

On calcule pour ${}^tX = [r, {}^tY]$, $Y \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$:

${}^tXMX = [r, {}^tY] \begin{bmatrix} \alpha & {}^ta \\ a & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ Y \end{bmatrix} = \alpha r^2 + r\,{}^tYa + r\,{}^taY + {}^tYSY$ *d'où :*

${}^tXMX = \alpha r^2 + 2\, r\,{}^taY + {}^tYSY$. (1)

On pose ${}^tU = [u, v, w]$ ***avec*** $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ (2)

et on affecte à ${}^tX$ *la valeur :* ${}^tX = [1, {}^tU]$.

Dans ce cas ${}^tXGX = 0$ *et donc* ${}^tXMX = 0$,
et (1) *s'écrit avec* $r = 1$, $Y = U$:

$\forall U$ *défini par* (2) : ${}^tXMX = \alpha + 2\,{}^taU + {}^tUSU = 0$. (3)

Si U *vérifie* (3) $-U$ *vérifie* (2) *et* (3) *donc :*

$\alpha + 2\,{}^ta(-U) + {}^t(-U)S(-U) = 0$ (4) .

En ajoutant t (3) *et* (4) *il vient :*

$\forall U$ *défini par* (2) : $\alpha + {}^tUSU = 0 \Leftrightarrow {}^tU\left(\alpha Id_3 + S\right)U = 0.$

Si ${}^tU\left(\alpha Id_3 + S\right)U = 0 \ \forall U$ *défini par* (2)

${}^tU\left(\alpha Id_3 + S\right)U = 0$ *est aussi vrai* $\forall U \in \mathbb{R}^3$

D'aprés le corollaire du lemme **9** *précédent :* $S = -\alpha \cdot Id_3$.

En retranchant (3) *et* (4) *il vient :* $\forall U \quad {}^taU = 0 \Rightarrow a = 0$.

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \alpha G.$$

Théorème 4 :

Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* $\boldsymbol{4}$,

et $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}_1)^2 - \sum_{i=2}^{4} (\boldsymbol{x}_i)^2$, *une forme quadratique sur* $\boldsymbol{E}$.

Si $\boldsymbol{\Phi'}$ *est une autre forme quadratique sur* $\boldsymbol{E}$ *telle que :* $\mathcal{C}(\boldsymbol{\Phi}) \subseteq \mathcal{C}(\boldsymbol{\Phi'})$,

alors $\boldsymbol{\Phi' = \lambda \Phi}$ *avec* $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le lemme **10**.

Chaptre IV :
Nature des vecteurs de l'espace − temps.

*Dans un espace de Minkowski, la forme quadratique associée à cet espace permet de classer les vecteurs en **3** catégories que l'on va étudier.*

Vecteurs dans un espace de Minkowski :

(*J-M. Souriau.*"Calcul Linéaire" •*PUF 1964*.)
*On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ à **4** dimensions muni de la forme quadratique de **Lorentz :***

$$\Phi(X) = x_1^2 - \sum_{i=2}^{4} x_i^2 \quad \text{où} \quad {}^bX = (x_1, ..., x_4) \text{, qui a pour matrice}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix} \text{ où } 0 \text{ est la colonne nulle de } \mathbb{R}^3.$$

*On veut décrire les ensembles de vecteurs **X** de $\mathbb{R}^4$ définis selon le signe de $\Phi(X)$. On distingue **3** sous − ensembles :*

$E_+ = \{X \in \mathbb{R}^4 / \Phi(X) > 0\} \cup \{0\}$ *les" vecteurs temps",*

$E_- = \{X \in \mathbb{R}^4 / \Phi(X) < 0\} \cup \{0\}$ *les" vecteurs espaces",*

$E_0 = \{X \in \mathbb{R}^4 / \Phi(X) = 0\}$ *les" vecteurs isotropes".*

Le fait d'ajouter ou non $\{0\}$ à E_+ et à E_- est variable selon les auteurs.
*On remarque que la nature des vecteurs est indépendante de la base de $\mathbb{R}^4$ choisie : si on note **P** la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$,*
$X = PX'$, $Y = PY'$ *et* $G' = {}^tPGP$ *d'aprés le **lemme 1** ci-dessous.*

$${}^tX\, GX = ({}^tX'\,{}^tP)\, G(PX') = {}^tX'({}^tPGP)X' = {}^tX'G'X'.$$

Lemme 1 :

*Si φ est une forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel **F** de dimension finie **n**, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ **2** bases de **F**, **P** la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, **A** la matrice représentant φ dans $\mathcal{B}$.*
*Alors la matrice **B** représentant φ dans $\mathcal{B}'$ vérifie : $B = {}^tPAP$.*
*Tout espace vectoriel **F** de dimension finie **n**, muni d'une forme bilinéaire symétrique φ possède une base φ-orthorgonale de **n** éléments distincts.*

Démonstration :

On a $\varphi(x, y) = {}^tX'BY' = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = X'\,{}^tPAPY'$ *avec **x** et **y** éléments de **F**,*
***X** et **Y** leur représentation dans $\mathcal{B}$, **X'** et **Y'** leur représentation dans $\mathcal{B}'$,*
***A** et **B** la représentation de φ pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En remarquant qu'il y a unicité de la représentation de φ pour une base donnée $\mathcal{B}(e_1, ..., e_n)$,*
car elle est égale à $(\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$, on a : $B = {}^tPAP$.

Montrons que si $\varphi \neq 0$, si $x \in F$ est non isotrope alors $(\mathbb{R}x) \oplus (\mathbb{R}x)^{\perp} = F$.
Montrons d'abord que $(\mathbb{R}x) \cap (\mathbb{R}x)^{\perp} = \{0\}$:
Soit $y \in (\mathbb{R}x) \cap (\mathbb{R}x)^{\perp}$, $y \in (\mathbb{R}x)$ donc $\exists\, \lambda$ tel que $y = \lambda x$ et $y \in (\mathbb{R}x)^{\perp}$,
donc $\varphi(x, y) = 0 = \varphi(x, \lambda x) = \lambda\varphi(x, x) \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow y = 0$.

Comme $\varphi(x,x) \neq 0$, $\forall y \in F$, $y = y - \dfrac{\varphi(x,y)}{\varphi(x,x)}x + \dfrac{\varphi(x,y)}{\varphi(x,x)}x$ *or*

$\varphi\left(y - \dfrac{\varphi(x,y)}{\varphi(x,x)}x, x\right) = 0$ **et** *donc* $F = (\mathbb{R}x) + (\mathbb{R}x)^{\perp}$ *et donc* $(\mathbb{R}x) \bigoplus (\mathbb{R}x)^{\perp} = F$.

Montrons maintenant l'existence d'une base orthogonale.
Si $\varphi = 0$ *toute base est orthogonale.*
Supposons que $\varphi \neq 0$ *et montrons le résultat par récurrence :*
Si $n = 1$ *la propriété est vérifiée. Supposons qu'elle est vraie pour* F *de dimension* $n - 1$.
Soit F de dimension n, *comme* $\varphi \neq 0$ *il existe* $e_n \in F$ *tel que* $\varphi(e_n, e_n) \neq 0$.

D'aprés ce qui précéde $(\mathbb{R}e_n) \bigoplus (\mathbb{R}e_n)^{\perp} = F$ *or* $\dim(\mathbb{R}e_n)^{\perp} = n - 1$ *et possède donc une base orthogonale* $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ *éléments et* e_n *est orthogonal à tout élément de cette base et alors* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *est une base orthogonale de F :*
Il est orthogonal par construction. Il est générateur car si $z \in F$,

$z = z_1 + z_2$ *avec* $z_1 \in \mathbb{R}e_n$ *et* $z_2 \in (\mathbb{R}e_n)^{\perp}$ *et donc* $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Il est libre car si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, $0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j\right) = \lambda_j$ *pour* $j = 1, \ldots, n$.

Remarque :
Cela revient à dire que toute matrice symétrique S *peut s'écrire sous la forme* $S = {}^tTDT$ *où* D *est une matrice diagonale de diagonale* $(d_{ii})_{i=1,n}$ *et* T *est une matrice carrée inversible.*
Si on note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *la base initiale et s'il existe une base* φ **− orthogonale** $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *et si on note* P *la matrice de passage à la base* φ **− orthogonale** *on* **aura**

$\varphi(X, Y) = {}^tXSY = {}^t(PX')S(PY') = {}^tX'\,{}^tPSP\,Y'$.

Par ailleurs si $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i$ **et** $Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu'_i e'_i$,

$\varphi(X, Y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i, \sum_{j=1}^{n} \mu'_j e'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \mu'_i \varphi(e_i, e_i) = {}^tX'DY' =$

avec D *la matrice diagonale dont la diagonale est* $(\varphi(e_i, e_i))$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

D*'où* ${}^tPSP = D$ *et donc* $S = ({}^tP)^{-1}DP^{-1} = {}^t(P^{-1})DP^{-1}$, *il suffit donc de poser* $T = P^{-1}$.

Réciproquement si X *et* Y *sont les coordonnées de* 2 *vecteurs* x *et* y *de* F *on a :*
$\varphi(X, Y) = {}^tXSY = {}^tX\,{}^tPDP\,Y = {}^t(PX)D(PY) = {}^tX'DY'$
avec $PX = X'$ *et* $PY = Y'$. *Considérons une base* $(e_i)_{i=1,n}$ *de* E,
notons que e_i *a pour coordonnées dans cette base* $E_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$ *avec* 1 *à la* $i-$*ième place. Comme* P *est inversible,* $(E'_i = P^{-1}E_i)_{i=1,n}$ *sont aussi les coordonnées de vecteurs d'une base de* E *et on a :*

$\varphi(E'_i, E'_j) = \varphi(P^{-1}E_i, P^{-1}E_j) = {}^t(PP^{-1}E_i)D(PP^{-1}E_j) = {}^tE_iDE_j$

$= 0$ *si* $i \neq j$, *sinon* d_{ii} *si* $i = j$.

Lemme 2 :

Soit Φ *une forme quadratique sur un espace vectoriel* E *de dimension* n
alors il existe p *et* q **2** *entiers naturels tels que* $p + q \leq n$ *et il existe une base* $\mathcal{B}$
orthogonale pour Φ *de* E *, dans laquelle la matrice de* Φ *est de la forme diagonale :*

$$\begin{bmatrix} Id_{\mathbb{R}^p} & & \\ & -Id_{\mathbb{R}^q} & \\ & & O_{\mathbb{R}^{n-(p+q)}} \end{bmatrix}$$

Le triplet (n, p, q) *est unique et s'appelle la signature de la forme quadratique ,*
p *l'indice d'inertie .*

Démonstration :

D'aprés le lemme précédent , il existe une base $\mathcal{B}$ *de* E *orthogonale pour* Φ**,**
c'est à dire que la matrice D *représentant* Φ *dans* $\mathcal{B}$ *est diagonale.*
Si $(d_i)_{i=1,n}$ *est la diagonale de* D *, on peut permuter les éléments de la base* $\mathcal{B}$
pour avoir : $1 \leq i \leq p \quad d_i > 0$,

$$p + 1 \leq i \leq p + q \quad d_i < 0$$

$$p + q + 1 \leq 1 \leq n \quad d_i = 0 .$$

Posons pour i *tel que* $1 \leq i \leq p + q$ *:* $\quad \delta_i^2 = |d_i|$

pour i *tel que* $p + q + 1 \leq i \leq n \quad \delta_i = 1$.

Considérons la matrice diagonale inversible Q *telle que* $Q_{i,i} = \delta_i$

et en notant $S_{p,q} = \begin{bmatrix} Id_{\mathbb{R}^p} & & \\ & -Id_{\mathbb{R}^q} & \\ & & O_{\mathbb{R}^{n-(p+q)}} \end{bmatrix}$ *on a* $D = {}^tQ\, S_{p,q} Q$

donc il existe une base $\mathcal{B}'$ *de* E *déduite de la base* $\mathcal{B}$ *par la matrice de passage* Q *.*
Supposons qu'il existe $S_{p,q}$ *et* $S_{p',q'}$ *répondant à la question avec* $0 \leq p + q \leq n$ *et*
$0 \leq p' + q' \leq n$ *et que* Φ *set représentée par* $S_{p,q}$ *dans une base* $\mathcal{B}(e_1, ..., e_n)$
et *par* $S'_{p,q}$ *dans une autre* $\mathcal{B}'(e'_1, ..., e'_n)$.
Posons $F = Vect(e_1, ..., e_p)$ *et* $G' = Vect(e'_{p'+1}, ..., e'_n)$ *on a :*
$\Phi(x) > 0 \quad \forall x \in F \setminus \{0\}$ *et* $\Phi(x) \leq 0 \quad \forall x \in G'$ *donc nécessairement* $F \cap G' = \{0\}$.
Comme $n = dim(E) \geq dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G) = p + (n - p')$ *et donc* $p' \geq p$.
En faisant le raisonnement symétrique avec $G_1' = Vect(e'_1, ..., e'_{p'})$ *et* $F_1 = Vect(e_{p+1}, ..., e_n)$
on obtient $p' \leq p$ *et donc* $p = p'$ *et* $q = q'$ *d'où l'unicité .*

Lemme 3 :

On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ *à* **4** *dimensions muni de*
la forme quadratique de ***Lorentz .***
Il existe dans $\mathbb{R}^4$ *un sous-espace de dimension* **3** *de vecteurs d'espace .*

Démonstration :

Considérer par exemple : $\{X \in \mathbb{R}^4 / x_1 = 0\}$.

Lemme 4 :

On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ *à* **4** *dimensions muni de la forme quadratique de* **Lorentz .**

Il n'existe pas dans $\mathbb{R}^4$ *de sous - espace de dimension* ≥ 2 *de vecteurs temps.*

Démonstration :

Car sinon il existe un sous − espace **F** *de dimension au moins égale à* **2** *de vecteurs temps • Comme il existe un sous - espace* **G** *de vecteurs espaces de dimension* **3** *et comme* $F \cap G = \{0\}$ *et donc* $dim(\mathbb{R}^4) \geq 5$.

Lemme 5 :

On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ *à* **4** *dimensions muni de la forme quadratique de* **Lorentz .**

Soit **2** *vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ **X** *et* **Y** *non nuls tels que* ${}^tXGX \geq 0$, ${}^tYGY \geq 0$ *et* ${}^tXGY = 0$ *alors* **X** *et* **Y** *sont colinéaires et isotropes .*

Démonstration :

Si on considère **X** *et Y* **2** *vecteurs temps non nuls.Si ils sont indépendants ils engendrent un s.e.v de dimension 2 de vecteurs positifs .C'est impossible donc* $\exists \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$X = \lambda Y \text{ et donc } : 0 = {}^tXGY = \lambda {}^tY\,GY = \frac{1}{\lambda} {}^tX\,GX.$$

Lemme 6 :

(**1**) *Tout vecteur* **X** *non nul orthogonal à un vecteur de temps* **Y** *non nul* $({}^tXGY = 0)$ *est un vecteur d'espace .*

(**2**) **2** *vecteurs isotropes indépendants non nuls* **X** *et* **Y** *ne sont jamais orthogonaux .*

Démonstration :

(**1**)

Si **X** *était un vecteur de temps non nul :* ${}^tXGX > 0$ *et* **Y** *tel que* ${}^tXGY = 0$ *alors* ${}^tYGY < 0$ *car sinon* ${}^tYGY \geq 0$ *et comme* ${}^tXGX > 0$ *et* ${}^tXGY = 0$ *, d'aprés le* ***lemme 5 X*** *serait isotrope, ce qui est contradictoire .*

(**2**)

Car sinon $0 = {}^tXGY = {}^tXGX = {}^tYGY$ *d'aprés le* ***lemme 5*** **X** *et* **Y** *sont liés.*

Définition :

Pour tout vecteur de temps $({}^tXGX \geq 0)$ *on pose* $\|X\|_G = \sqrt{{}^tXGX}$.

Lemme 7 :

Soit φ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel* **E** *de dimension n , alors pour toute base* $\mathcal{B}(e_1, \ldots, e_n)$*, si on considère la matrice représentant* φ *dans* $\mathcal{B}$ *:*

$Q = (\varphi(e_i, e_j))$ *, alors le déteminant de* **Q** *est du signe de* $(-1)^{n-p}$ *ou* **p** *est l'indice d'inertie de* φ.

Démonstration :

D'aprés le ***lemme 2*** *il existe une base* $\mathcal{B}'(e'_1, \ldots, e'_n)$ *où la matrice représentant* φ *est de la forme :*

$$Q' = \begin{bmatrix} Id_{\mathbb{R}^p} & 0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^q} \end{bmatrix} \text{ et donc } det(Q') = (-1)^{n-p} .$$

Soit **S** *la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}'$ *à la base* $\mathcal{B}$ *on a :*

$$det(Q) = det({}^tSQ'S) = det(Q')\,(det(S))^2 \Rightarrow signe(det(Q)) = (-1)^{n-p}.$$

Lemme 8 : *Contre - inégalité de Cauchy - Schwartz.*

On a $\left|{}^{t}XGY\right| \geq \|X\|_G \|Y\|_G$ *pour tout vecteurs de temps ou isotropes .*

Démonstration :

Considérons la matrice S *constituée des* **2** *colonnes* $X \in \mathbb{R}^4$ *et* $Y \in \mathbb{R}^4$: $S = [X, Y]$.

On suppose que X *et* Y *sont des vecteur temps non nuls*

car si l'un d'eux est isotrope ou nul l'inégalité est évidente .

On a ${}^{t}SGS = \begin{bmatrix} {}^{t}X \\ {}^{t}Y \end{bmatrix} G[X, Y] = \begin{bmatrix} {}^{t}XGX & {}^{t}XGY \\ {}^{t}YGX & {}^{t}YGY \end{bmatrix}$.

On a $\det({}^{t}SGS) = \|X\|_G^2 \|Y\|_G^2 - ({}^{t}XGY)^2$.

Si $\det({}^{t}SGS) = 0$ *le lemme est démontré .*

Si $\det({}^{t}SGS) \neq 0$ *et si* $X = \lambda Y$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

on a $\det({}^{t}SGS) = \begin{vmatrix} \lambda^2\, {}^{t}YGY & \lambda\, {}^{t}YGY \\ \lambda\, {}^{t}YGY & {}^{t}YGY \end{vmatrix} = 0$

impossible donc X *et* Y *sont non colinéaires et* X *et* Y *forment une base* $S = [X, Y]$
d'un sous − espace vectoriel F *de* $\mathbb{R}^4$ *de dimension* **2.**

Comme ${}^{t}SGS = \begin{bmatrix} {}^{t}XGX & {}^{t}XGY \\ {}^{t}YGX & {}^{t}YGY \end{bmatrix}$, ${}^{t}SGS$ *défini une forme bilinéaire symétrique* Ψ *sur* F *par*

$\Psi(u, v) = {}^{t}U\, {}^{t}SGSV$ *avec* $u = SU$ *et* $v = SV$.

Soit φ *la forme bilinéaire définie sur* $\mathbb{R}^4$ *dont la matrice est* G .

On vérifie immédiatement que $\varphi_{/F}$ *est aussi une forme bilinéaire symétrique sur* F.

Montrons qu'elle est régulière c'est à dire :

$F^{\perp_{\varphi_{/F}}} = \{0\}$ *ou* $\left\{u \in F / \varphi_{/F}(u, v) = 0 \ , \forall v \in F\right\} = \{0\}$.

S *étant une base de* F *est une application bijective de* $\mathbb{R}^2$ *sur* F **.**

Si G *est la représentation de* φ *dans* $\mathbb{R}^4$, ${}^{t}SGS$ *est la représentation de* $\varphi_{/F}$

dans F *muni de la base* S *: soit* u *et* v **2** *vecteurs de* F *; on a si* $\widetilde{U}$ *et* $\widetilde{V}$ *les représentations*

de u et v dans $\mathbb{R}^4$, U *et* V *dans* F *muni de la base* S *et* $\widetilde{U} = SU$, $\widetilde{V} = SV$ *:*

$\varphi(u, v) = \varphi_{/F}(u, v) = {}^{t}\widetilde{U}\, G\, \widetilde{V} = {}^{t}U\, {}^{t}SGSV.$

Soit donc $u \in F^{\perp_{\varphi_{/F}}}$ *et* $v \in F$, $u = SU$ *et* $v = SV$ *avec* U *et* V *élément de* $\mathbb{R}^2$*.On a :*

$\varphi_{/F}(u, v) = {}^{t}V\, {}^{t}SGSU = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^2$ *et donc* ${}^{t}SGSU = 0$ *, comme* $\det({}^{t}SGS) \neq 0$ *on a* $U = 0$ **.**

$\varphi_{/F}$ *est bien une forme bilinéaire symétrique régulière sur* F .

et le ***lemme*** *7 s'applique :* $\mathrm{signe}\left(\det({}^{t}SGS)\right) = (-1)^{2-p}$, p *l'indice d'inertie de* $\varphi_{/F}$

or F *étant de dimension* **2**, *d'aprés le* ***lemme 4*** *il n'y pas de sous − espace de dimension* ≥ 2 *de vecteurs temps et* F *contient* X *, vecteur de temps* **.** $\varphi_{/F}$ *étant une forme bilinéaire symétrique régulière sur* F *d'aprés le* ***lemme 2*** *,* $\varphi_{/F}$ *peut être repésenté dans une base* $\varphi_{/F}$ *− orthogonale par une matrice diagonale composée de* **1, -1** *et* **0** *.La nature des vecteurs restant inchangé,*

la seule possibilité est donc 1 et -1.
Et donc la seule possibilité pour $\boldsymbol{p}$ *est* $\boldsymbol{p=1}$ **.**

D'où signe$\left(\boldsymbol{det}\left({}^t\boldsymbol{SGS}\right)\right)=\boldsymbol{-1}$ ***et*** *donc* $\|X\|_G^2\|Y\|_G^2<\left({}^tXGY\right)^2$.

Remarque :
On rappelle que l'ensemble des vecteurs temps ne forment pas un sous − espace vectoriel prendre par exemple $\boldsymbol{X}={}^t(4,1,1,1)$ ***et*** $\boldsymbol{Y}={}^t(-4,1,1,1)$ ***et*** $\boldsymbol{X+Y}={}^t(\boldsymbol{0,2,2,2})$.

<u>Lemme 9 :</u>
Soit $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *et* $\boldsymbol{Z}$ ***3*** *vecteur de temps ou isotropes on a alors :*

$$\left({}^tXGY\right)\left({}^tYGZ\right)\left({}^tZGX\right)\geq\left({}^tXGX\right)\left({}^tYGY\right)\left({}^tZGZ\right)$$

Démonstration :
Considérons $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X,Y,Z}]$, *on a :*

$${}^tSGS=\begin{bmatrix}{}^tX\\{}^tY\\{}^tZ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-Id_{\mathbb{R}^3}\end{bmatrix}[X,Y,Z]=\begin{bmatrix}X_1&-X_2&-X_3&-X_4\\Y_1&-Y_2&-Y_3&-Y_3\\Z_1&-Z_2&-Z_3&-Z_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\\X_3&Y_3&Z_3\\X_4&Y_3&Z_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}{}^tXGX&{}^tXGY&{}^tXGZ\\{}^tYGX&{}^tYGY&{}^tYGZ\\{}^tZGX&{}^tZGY&{}^tZGZ\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\textit{et }\boldsymbol{det}\left({}^tSGS\right)=\;&{}^tXGX\left[{}^tYGY\cdot{}^tZGZ-{}^tYGZ\cdot{}^tZGY\right]\\&-{}^tXGY\left[{}^tYGX\cdot{}^tZGZ-{}^tYGZ\cdot{}^tZGX\right]\\&+{}^tXGZ\left[{}^tYGX\cdot{}^tZGY-{}^tYGY\cdot{}^tZGX\right]\\=\;&{}^tXGX\cdot{}^tYGY\cdot{}^tZGZ-{}^tXGX\cdot{}^tYGZ\cdot{}^tZGY\\&-{}^tXGY\cdot{}^tYGX\cdot{}^tZGZ+{}^tXGY\cdot{}^tYGZ\cdot{}^tZGX\\&+{}^tXGZ\cdot{}^tYGX\cdot{}^tZGY-{}^tXGZ\cdot{}^tYGY\cdot{}^tZGX\\=\;&{}^tXGX\cdot{}^tYGY\cdot{}^tZGZ-{}^tXGX\left({}^tYGZ\right)^2\\&-{}^tYGY\cdot\left({}^tXGZ\right)^2-{}^tZGZ\left({}^tXGY\right)^2+2\cdot{}^tXGY\cdot{}^tYGZ\cdot{}^tZGX;\end{aligned}$$

Or $\left|{}^tXGY\right|\geq\sqrt{{}^tXGX}\sqrt{{}^tYGY}$, $\left|{}^tYGZ\right|\geq\sqrt{{}^tYGY}\sqrt{{}^tZGZ}$, $\left|{}^tZGX\right|\geq\sqrt{{}^tZGZ}\sqrt{{}^tXGX}$,
d'où :

$$\begin{aligned}&-{}^tXGX\left({}^tYGZ\right)^2-{}^tYGY\cdot\left({}^tXGZ\right)^2-{}^tZGZ\left({}^tXGY\right)^2\\&\leq-{}^tXGX\cdot{}^tYGY\cdot{}^tZGZ-{}^tYGY\cdot{}^tZGZ\cdot{}^tXGX-{}^tZGZ\cdot{}^tXGX\cdot{}^tYGY\\&=-3\cdot{}^tXGX\cdot{}^tYGY\cdot{}^tZGZ,\end{aligned}$$

et donc $\boldsymbol{det}\left({}^tSGS\right)\leq-2\cdot{}^tXGX\cdot{}^tYGY\cdot{}^tZGZ+2\,{}^tXGY\cdot{}^tYGZ\cdot{}^tZGX$**.**

Etudions le signe de $\boldsymbol{det}\left({}^tSGS\right)$.

Si $\boldsymbol{det}\left({}^tSGS\right)=\boldsymbol{0}$ *le lemme est démontré .*

Si $\boldsymbol{det}\left({}^tSGS\right)\neq\boldsymbol{0}$ *et si* $X=\lambda Y+\mu Z$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\mu\in\mathbb{R}^*$, *on a* $\det({}^tSGS) = \det\begin{bmatrix} {}^tXGX & {}^tXGY & {}^tXGZ \\ {}^tYGX & {}^tYGY & {}^tYGZ \\ {}^tZGX & {}^tZGY & {}^tZGZ \end{bmatrix} = 0$ *car* $(\lambda {}^tY + \mu {}^tZ)GX = \lambda {}^tYGX + \mu {}^tZGX$

impossible donc X *, Y et Z sont non colinéaires et forment une base d'un sous − espace vectoriel* F *de* $\mathbb{R}^4$ *de dimension* 3.

Comme ${}^tSGS = \begin{bmatrix} {}^tXGX & {}^tXGY & {}^tXGZ \\ {}^tYGX & {}^tYGY & {}^tYGZ \\ {}^tZGX & {}^tZGY & {}^tZGZ \end{bmatrix}$, ${}^tSGS$ *est une forme bilinéaire symétrique sur* F.

En faisant un raisonnement similaire à celui du lemme précédent on trouve que :
$\text{signe}(\det({}^tSGS)) = (-1)^{3-1} = 1$.

D'où $\det({}^tSGS) > 0$ *et le lemme est démontré .*

<u>Lemme 10 :</u>

On considère $\mathbb{R}^4$ *muni de la forme quadratique définie par* $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix}$,

alors les vecteurs non nuls de temps ou isotrope se partagent en **2** *classes opposées* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *et si* X *et* Y *sont des vecteurs temps non nuls on a :*

$\quad {}^tXGY \geq 0 \Leftrightarrow X$ *et* Y *appartiennent à la même classe ,*

$\quad {}^tXGY \leq 0 \Leftrightarrow X$ *et* Y *appartiennent à des classes opposées .*

Deux vecteurs X *et* Y *d'une même classe vérifient* ${}^tXGY > 0$ *sauf s'ils sont isotropes et parallèles . Dans ce cas ils sont de la même classe si leur rapport est un nombre strictement positif .*

Démonstration :

Soit X_0 *un vecteur de temps non nul arbitraire .Un vecteur de temps* Y *non nul n'est jamais orthogonal à* X_0 *car sinon par le* ***lemme 6*** *,* Y *serait un vecteur d'espace donc* ${}^tYGX_0 > 0$ *ou* ${}^tYGX_0 < 0$ *.On dira que* $Y \in \mathcal{C}_1$ *dans le premier cas sinon* $Y \in \mathcal{C}_2$ *.Les classes sont opposées : si* $Y \in \mathcal{C}_1$ *alors* $-Y \in \mathcal{C}_2$ *.Le* ***lemme 9*** *montre que :*

$$({}^tX_0GY)({}^tYGZ)({}^tZGX_0) \geq ({}^tX_0GX_0)({}^tYGY)({}^tZGZ) \geq 0, \ \forall Y, \ \forall Z \text{ vecteurs de temps.}$$

Si Y *et* Z *appartiennent*

− *à la même classe* $\mathcal{C}_1$: ${}^tX_0GY \geq 0$ *et* ${}^tZGX_0 \geq 0 \Rightarrow {}^tYGZ \geq 0$,

− *à la même classe* $\mathcal{C}_2$: ${}^tX_0GY \leq 0$ *et* ${}^tZGX_0 \leq 0 \Rightarrow {}^tYGZ \geq 0$

− *à des classes différentes :* ${}^tX_0GY \leq 0$ *et* ${}^tZGX_0 \geq 0 \Rightarrow {}^tYGZ \leq 0$ *ou*

${}^tX_0GY \geq 0$ *et* ${}^tZGX_0 \leq 0 \Rightarrow {}^tYGZ \leq 0$.

Réciproquement : Si ${}^tYGZ \geq 0$

ou bien ${}^tX_0GY \geq 0$ *et* ${}^tZGX_0 \geq 0 {}^tYGZ \leq 0$ *à la même classe* $\mathcal{C}_1$,

ou bien ${}^tX_0GY \leq 0$ *et* ${}^tZGX_0 \leq 0 \Rightarrow Y$ *et* Z *appartiennent à la même classe* $\mathcal{C}_2$,

de même si ${}^tYGZ \leq 0 \Rightarrow Y$ *et* Z *appartiennent à des classes différentes .*

La dernière partie du lemme est une conséquence directe du ***lemme 5.***

Remarque :
*D'une manière arbitraire les éléments d'une des **2** classes sont appelés vecteurs de futur ou d'avenir, les éléments de l'autre vecteurs de passé .*

Lemme 11 :
*Soient **X** et **Y** **2** vecteurs de temps ou isotropes .*
*Si **X** et **Y** appartiennent à la même classe , leur somme est encore un vecteur de la même classe ,*
et ils vérifient la contre − inégalité triangulaire si on note $\|X\|_G = \sqrt{{}^tXX}$ *si* ${}^tXX \geq 0$ **:**

$$\|X+Y\|_G \geq \|X\|_G + \|Y\|_G .$$

Démonstration :
*D'aprés le **lemme 10*** ${}^tXGY \geq 0$ *et d'aprés le **lemme 8*** $\left|{}^tXGY\right| \geq \|X\|_G\|Y\|_G$ *et donc*

$$XGY \geq \|X\|_G\|Y\|_G$$

On a donc :

$$\|X+Y\|_G^2 = {}^t(X+Y)G(X+Y)\,) = \|X\|_G^2 + \|Y\|_G^2 + 2{}^tXGY$$

$$\geq \|X\|_G^2 + \|Y\|_G^2 + +2\,\|Y\|_G\|X\|_G = (\,\|X\|_G + \|X\|_G)^2 .$$

*Si **V** est un vecteur pris dans la classe de **X** et **Y** , on a :*

$${}^tXGV \geq 0 \text{ et } {}^tYGV \geq 0 \;\Rightarrow {}^t(X+Y)GV \geq 0$$ *et* $X+Y$ *fait partie de la classe de **V** donc de celle **X** et **Y**.*

Remarque :
*(**1**) Si **X** et **Y** sont **2** vecteurs de classe différente la somme peut être de nature quelconque :*
Si $X = {}^t(2, 1, 1, 1)$, ${}^tXGX = 1$ *et* $Y = {}^t(-3, 1, 1, 1)$, ${}^tYGY = 6$, *on a* ${}^tXGY = -3$,
$X+Y = {}^t(-1, 2, 2, 2)$, ${}^t(X+Y)G(X+Y)\,) = -11$ *(vecteur d'espace)* **.**
Si $X = {}^t(4, 1, 1, 1)$, ${}^tXGX = 13$ *et* $Y = {}^t(-1, 0, 0, 0)$, ${}^tYGY = 1$, *on a* ${}^tXGY = -4$,
$X+Y = {}^t(3, 1, 1, 1)$, ${}^t(X+Y)G(X+Y)\,) = 6$ *(vecteur de temps).*
Si $X = {}^t(3, 1, 1, 1)$, ${}^tXGX = 6$ *et* $Y = {}^t\left(-2, \frac{\sqrt{3}}{3} - 1, \frac{\sqrt{3}}{3} - 1, \frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)$, ${}^tYGY = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,
on a ${}^tXGY = -3$, $X+Y = {}^t\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,
${}^t(X+Y)G(X+Y)\,) = 0$ *(vecteur isotrope).*
*(**2**) La contre − inégalité triangulaire donne une explication géométrique du" paradoxe des jumeaux" .*

Chaptre V :
Vitesse relative de 2 repères.

*En mécanique classique, si on considère **2** observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre on peut écrire directement que* $\overrightarrow{V_{O'|O}} = -\overrightarrow{V_{O|O'}}$, *pour ces **2** observateurs : le temps est absolu ainsi que la distance* $\|\overrightarrow{OO'}\|$ *.*
*Si les lois de la physique sont les mêmes dans les **2** repères, c'est à dire que de mêmes objets placés dans les mêmes conditions produiront les mêmes effets : mesurer la vitesse de **O'** par rapport à **O** et mesurer la vitesse de **O** par rapport à **O'** donneront le même résultat à condition que ces **2** vitesses aient le même module • Comme les **2** temps mesurés **t** et **t'** sont différents, de même pour les coordonnées spatiales, et en se rappelant qu'à ce stade de l'étude on sait seulement que la transformation est linéaire et que le module **c** de la vitesse de la lumière est invariant, on va justifier de façon élémentaire que la vitesse relative de **2** repères en translation uniforme est la même, en module, mesurée dans l'un ou l'autre des repères et opposée vectoriellement en signe.*
(*voir E.Gourgoulhon*."Relativité restreinte" *• EDP Sciences 2010 par exemple*).

Vitesse relative de deux repères spatiaux en translation uniforme :

Soit deux repères spatiaux $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}'$ *en translation uniforme qu'on supposera tels que leurs origines **O** et **O'** coïncident une seule fois au cours de leur mouvement relatif en un point de l'espace spatial **E** et en ce point les horloges des deux repères spatiaux sont mises à zéro :* $t = t' = 0$.
*On rappelle que le temps associé à tout point fixe par rapport à **O** dans* $\mathcal{R}$ *est le temps de **O**, de même pour le temps associé à tout point fixe par rapport à **O'** dans* $\mathcal{R}'$ *est le temps de **O'*** (*synchronisation des horloges*).
On peut ainsi définir la vitesse uniforme d'un point $P(t)$ *par rapport à **O** dans* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\left(\vec{v}_{P|O}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{OP(t_1)} - \overrightarrow{OP(t_0)}}{t_1 - t_0}$$

.De même dans $\mathcal{R}'$.

Sachant que $\overrightarrow{OO'(0)} = \vec{0}$, *on a dans* $\mathcal{R}$ *:*

$$\left(\vec{v}_{O'|O}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{OO'(t)}}{t} = -\frac{\overrightarrow{O'O(t)}}{t} = -\left(\vec{v}_{O|O'}\right)_{\mathcal{R}}$$

de même dans $\mathcal{R}'$ *sachant que* $\overrightarrow{O'O(0)} = \vec{0}$ *:*

$$\left(\vec{v}_{O|O'}\right)_{\mathcal{R}'} = \frac{\overrightarrow{O'O(t')}}{t'} = -\frac{\overrightarrow{OO'(t')}}{t'} = -\left(\vec{v}_{O'|O}\right)_{\mathcal{R}'}.$$

Est-ce que : $\left(\vec{v}_{O'|O}\right)_{\mathcal{R}} = -\left(\vec{v}_{O|O'}\right)_{\mathcal{R}'}$?

*On sait déjà que ces **2** vitesses sont parallèles à* $\overrightarrow{OO'}$ *constante et de sens opposés.*
Evaluons leur module respectif.
Soit $\vec{v}$ *la vitesse de **O'** par rapport à **O** dans* $\mathcal{R}$. *Comment mesurer* $\|\vec{v}\|$?
*Pour celà on va procéder à une expérience simple mesurée à partir de **O** et **O'**.*
On notera $\mathcal{R}_4$ *et* $\mathcal{R}_4'$ *les repères, dans l'espace à **4** dimensions, associés à* $\mathcal{R}$ *à* $\mathcal{R}'$ *les repères spatiaux et à leur horloge respective.*

Comme la transformation qui permet de passer de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$ est linéaire elle peut être representée par une matrice ***4 x4 M***, $\mathscr{R}_4$ *à* $\mathscr{R}_4'$ *étant munis de bases orthonormales adéquates* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$.

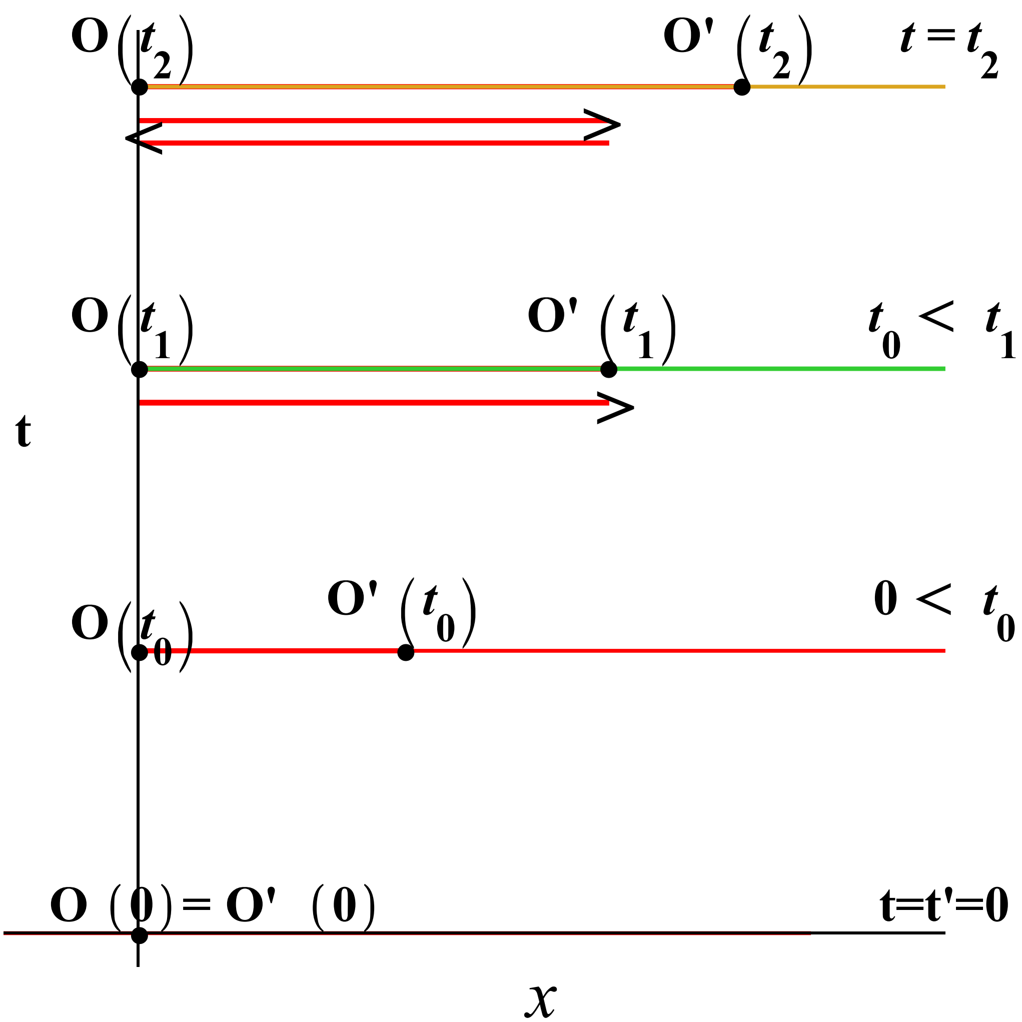
Expérience :

Au temps $\boldsymbol{t = t' = 0}$, ***O*** *et* ***O'*** *coïncident .*

Au temps $\boldsymbol{t = t_0 > 0}$ *on envoie un rayon lumineux de* ***O*** *vers* ***O'***
qui le renvoie vers ***O*** *au temps* $\boldsymbol{t = t_1}$ *, et atteint* ***O*** *au temps* $\boldsymbol{t = t_2}$.

On note $\boldsymbol{O'}(t)$ *et* $\boldsymbol{O}(t)$ *la position de* ***O'*** *et* ***O*** *au temps t dans* $\mathscr{R}$.

Pour le graphique on a supposé que l'axe ***Ox*** *est parallèle à* $\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}}$:



Comme le mouvement est rectiligne uniforme le long de droite définie par ***O*** *et* $\vec{\mathcal{V}}$:
on a donc $\overline{\boldsymbol{OO'}(t_0)} = \|\vec{\mathcal{V}}\| . t_0$ *, de même* $\overline{\boldsymbol{O'}(t_0)\boldsymbol{O}(t_1)} = \|\vec{\mathcal{V}}\| . (t_1 - t_0)$.

La durée étant le même à l'aller et au retour $t_1 = t_0 + \dfrac{(t_2 - t_0)}{2} = \dfrac{(t_2 + t_0)}{2}$.

Si ***c*** *est la vitesse de la lumière :*

$$\left(t_2 - t_0\right)c = 2\,\|\vec{\mathcal{V}}\|\; t_0 + 2\,\|\vec{\mathcal{V}}\|\left(t_1 - t_0\right)$$

donc : $\left(t_2 - t_0\right)c = 2\,\|\vec{\mathcal{V}}\|\; t_1$ *et donc :* $\|\vec{\mathcal{V}}\| = \dfrac{\left(t_2 - t_0\right)}{2\,t_1}c = \dfrac{\left(t_2 - t_0\right)}{t_2 + t_0}c$.

Du point de vue de l'observateur sur $\boldsymbol{O'}$ *, il voit un rayon partir de* $\boldsymbol{O}$ *au* t_0'*,*
et $\overline{O'O\left(t_0'\right)} = \|\vec{\mathcal{V}'}\|.t_0'$ *, le rayon arrivera au temps* t_1' *, puis repartira vers* $\boldsymbol{O}$
qu'il touchera au temps t_2'*.Le rayon aura donc parcouru la distance* $c\left(t_2' - t_0'\right)$.
Dans le sens $\overrightarrow{OO'}$ *la distance parcourue est :* $\overline{O'O\left(t_0'\right)} = \|\vec{\mathcal{V}'}\|.t_0'$ *et dans le sens retour :*

$\|\vec{\mathcal{V}'}\|.t_0' + \|\vec{\mathcal{V}'}\|.\left(t_1' - t_0'\right) + \|\vec{\mathcal{V}'}\|.\left(t_2' - t_1'\right) = \|\vec{\mathcal{V}'}\|\; t_2'$ *et donc :*

$$\left(t_2' - t_0'\right)c = \|\vec{\mathcal{V}'}\|\; t_1' + \|\vec{\mathcal{V}'}\|\; t_2' \;\; et \;\; \|\vec{\mathcal{V}'}\| = \frac{\left(t_2' - t_{0'}\right)}{t_2' + t_0'}c\,.$$

Soit $\boldsymbol{M} = \left(m_{i,\,j}\right)$ *la matrice de passage des repères* $\mathcal{R}_4'$ *à* $\mathcal{R}_4$ *associés à*
$\mathcal{R}'$ ***à*** $\mathcal{R}$ *et à leur horloge respective dans l'espace à **4** dimensions :*

$\boldsymbol{O}$ *a pour coordonnées* $\left(ct,\,0,\,0,\,0\right)$ *dans* $\mathcal{R}_4$,

$\boldsymbol{O}$ *aura pour coordonnées* $\left(m_{1,\,1}ct\,,\,m_{2,\,1}ct\,,\,m_{3,\,1}ct\,,\,m_{4,\,1}ct\right)$ *dans* $\mathcal{R}_4'$

donc en $\boldsymbol{O}$ $t' = m_{1,\,1}ct$ *et comme* t_2 *et* t_0 *sont associés à* $\boldsymbol{O}$ *on a :*

$t'_2 = m_{1,\,1}c\,t_2$ *et* $t'_0 = m_{1,\,1}c.t_0$ *et donc* $\|\vec{\mathcal{V}}\| = \dfrac{\left(t'_2 - t'_0\right)}{t'_2 + t'_0}.c = \dfrac{\left(t_2 - t_0\right)}{t_2 + t_0}.c$

a la même valeur dans $\mathcal{R}'$ *et* $\mathcal{R}$ *et comme l'expérience peut être vue par les **2** observateurs*
$\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ *comme une expérience pour mesurer la vitesse relative entre* $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ *on a :*

$$\|\vec{\mathcal{V}}_{O'\,|\,O}\|_{\mathcal{R}} = \|\vec{\mathcal{V}}_{O\,|\,O'}\|_{\mathcal{R}'}.$$

*On pourra donc parler de vitesse relative de **2** repères en translation uniforme*
$\vec{\mathcal{V}}$ *et* $-\vec{\mathcal{V}}$ *porté par* $\overrightarrow{OO'}$ *de module* $\|\vec{\mathcal{V}}\|$ *commun aux **2** repères .*

<u>Remarque :</u>

Si on considère un observateur sur $\boldsymbol{O}$ *qui observe une horloge sur* $\boldsymbol{O'}$ *qui s'éloigne de* $\boldsymbol{O}$*,*
avec une vitesse uniforme donnée pour ce repère et un observateur sur $\boldsymbol{O'}$
qui observe une horloge identique sur $\boldsymbol{O}$ *qui s'éloigne de* $\boldsymbol{O'}$
nous sommes dans une situation complètement symétrique puisque $\boldsymbol{O}$ *voit s'éloigner* $\boldsymbol{O'}$
et $\boldsymbol{O'}$ *voit s'éloigner* $\boldsymbol{O}$ *avec la même vitesse numérique en module .*
*Les lois physiques étant les mêmes dans **2** repères galiléens en translation uniforme*
le coefficient de dilatation $m_{1,\,1}$ *des durées sera le même dans les **2** mesures*
*faites dans chacun des **2** repères . Donc si on note* $\boldsymbol{N} = \left(n_{i,\,j}\right)$ *la matrice inverse de* $\boldsymbol{M}$*,*
sachant que $t' = m_{1,\,1}.t$ (1) *et* $t = n_{1,\,1}.t'$ (2) *, par ce qui précéde*
on aura $m_{1,\,1} = n_{1,\,1}$ *.On notera par la suite* γ *cette valeur commune .*
***Attention** à cette écriture , dans* (1) t' *est la valeur mesurée par* $\boldsymbol{O'}$ *de l'horloge placée*
en $\boldsymbol{O}$ *, dans* (2) t' *est la valeur indiquée par l'horloge placée en* $\boldsymbol{O'}$ *.*
Cela est développé dans le chapitre suivant .

Chaptre VI :
Nature de la transformation de Lorentz .

(*cf : N.M.J. Woodhouse* . " Special Relativity " •*Springer 2002* .)
Où en sommes − nous ?
En repenant le chapitre **I** *nous avons* **2** *bases :*
$(1)\mathscr{B}\left(O, c\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, *orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique*
$\phi(t, x, y, z) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, (**c** : *vitesse de la lumière*)
d'un espace vectoriel , isomorphe à $\mathbb{R}^4$, *muni d'une structure similaire .*
$(2)\mathscr{B}'\left(O, c\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right)$, *orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique*
$\phi'(t', x', y', z') = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$, (**c** : *vitesse de la lumière invariante*)
d'un espace vectoriel , isomorphe à $\mathbb{R}^4$, *muni d'une structure similaire .*
On cherche une application **T** *de* $\mathscr{B}'$ *dans* $\mathscr{B}$ *qui doit être linéaire* (*chap.* **II**) , *qui vérifie :*
$\phi \circ T = \phi'$ *sachant que les bases spatales sous − jacentes* $B\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *et*
$B'\left(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right)$ *sont en mouvement l'une par rapport à l'autre •Soit* $\vec{V}$ *la vitesse de* **O'**
par rapport à **O** •*Nous avons vu que* ·(*chap. V*) *que la vitesse de* **O** *par rapport à* **O'** *est* $-\vec{V}$.
Notre but est d'expliciter **T** *en fontion de* $\vec{V}$ *ou ce qui revient au même en fonction de* $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{V}}{c}$.
D'aprés le chapitre **II** *est linéaire donc représentée par une matrice* $M = M\left(\vec{\beta}\right) = \left(m_{i, j}\right)$.
O' *est représentée par le vecteur* $X = {}^t(ct, x, y, z)$ *dans* $\mathscr{B}$, *et par* $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ *dans* $\mathscr{B}'$.
Comme $X = MX'$ *on en déduit que le temps* **t** *mesuré par un observateur situé en* **O** *d'une horloge située en* **O'** *et qui indique le temps* **t'** *à un observateur situé en* **O'** *vérifie* $t = m_{1, 1}t'$
avec $m_{1, 1} > 0$: *on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps et qu'une durée se transforme en un instant.*

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1}ct' \\ m_{2,1}ct' \\ m_{3,1}ct' \\ m_{4,1}ct' \end{bmatrix}.$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en **O'** *observe une horloge située en* **O** *qui indique un temps* **t** *pour l'observateur situé en* **O** •*L'observateur de* **O'** *mesure alors un temps* **t'** •*Dans cette situation* $X = {}^t(ct, 0, 0, 0)$ *dans* $\mathscr{B}$,
et $X' = {}^t(ct', x', y', z')$ *dans* $\mathscr{B}'$ •*Comme* $X' = M^{-1}X$ *et donc* $t' = m^{-1}_{1, 1}t$
et $m^{-1}_{1, 1} > 0$ *comme précédemment.*
Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment , les unités dans les **2** *repères étant définies de la même façon :* $m^{-1}_{1, 1} = m_{1, 1}$.

Considérons maintenant un photons issu de **O** *au temps* $t = 0 = t'$, *ses coordonnées vérifient :*
$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ *pour* **O** *et vérifie* $c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$ *pour* **O'**.

D'aprés le chapitre **III** $\cdot$ (**th.4**) **:**

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \lambda\left(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Si on note $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *on peut écrire* ${}^tX'GX' = \lambda {}^tX\,GX = \lambda {}^t(MX')GMX'$ **et** *donc*

${}^tX'GX' = \lambda X'\,{}^tMGMX'$ *et cela pour tout* X'. ${}^tMGM$ *étant symétrique , en applicant le lemme* **10** *du chapitre* **III** ${}^tMGM = \lambda G$.

<u>Théorème :</u>

Sous les hypothèses précédentes ${}^tMGM = G$.

Démonstration :

D'aprés ce qui précéde ${}^tMGM = \lambda G$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

D'où $\lambda GM^{-1} = {}^tMG \Rightarrow M^{-1} = \lambda^{-1}G^{-1}\,{}^tM\,G = \lambda^{-1}G\,{}^tM\,G$.

$$\text{Si } M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^{-1}G\,{}^tM\,G = \begin{bmatrix} \frac{m_{1,1}}{\lambda} & -\frac{m_{2,1}}{\lambda} & -\frac{m_{3,1}}{\lambda} & -\frac{m_{4,1}}{\lambda} \\ -\frac{m_{1,2}}{\lambda} & \frac{m_{2,2}}{\lambda} & \frac{m_{3,2}}{\lambda} & \frac{m_{4,2}}{\lambda} \\ -\frac{m_{1,3}}{\lambda} & \frac{m_{2,3}}{\lambda} & \frac{m_{3,3}}{\lambda} & \frac{m_{4,3}}{\lambda} \\ -\frac{m_{1,4}}{\lambda} & \frac{m_{2,4}}{\lambda} & \frac{m_{3,4}}{\lambda} & \frac{m_{4,4}}{\lambda} \end{bmatrix} = M^{-1}$$

Comme $m^{-1}_{1,1} = m_{1,1} \Rightarrow \lambda = 1$.

L'opérateur de transformation **T** *est donc défini par une matrice* **M** *qui vérifie* ${}^tMGM = G$.

Son inverse M^{-1} *vérifie :* $M^{-1} = G\,{}^tM\,G$.

De telles matrices sont appelées matrice de Lorentz •Leur étude est faite dans le prochain chapitre .

On peut remarquer déjà que si **M** *est de Lorentz alors* ${}^tM$ *est aussi de Lorentz :*

De $M^{-1} = G\,{}^tM\,G$ *on a* ${}^tM = GM^{-1}G$ *puisque* $G^2 = Id_{\mathbb{R}^4}$, *on en déduit que :*

${}^t({}^tM)G\,{}^tM = MG\,{}^tM = MG(GM^{-1}G) = G$. *Donc* ${}^tM$ *est de Lorentz .*

Chaptre VII :
Etude des matrices de Lorentz .

On commence par étudier les matrices de Lorentz d'une manière générale , puis nous donnons une évaluation de chacun de ses termes .
Pour une meilleure lisibilité on énonce les résultats dans une première partie , et les démonstrions en annexe .

(*cf* : *J − M.Souriau.*"Calcul Linéaire ".*PUF 1964* .)

Groupe de Lorentz :

On considèrent sur $\mathbb{R}^n$ *la forme quadratique de* **Lorentz :**

$$\Phi(X) = x_1^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \quad \text{où} \quad {}^bX = (x_1, ..., x_n) \text{ qui a pour matrice}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{bmatrix} \text{ où } \mathbf{0} \text{ est la colonne nulle de } \mathbb{R}^{n-1}.$$

On cherche les matrices M *qui sont des* $\Phi -$ **isométrie** :

$$\Phi(MX) = \Phi(X) \Leftrightarrow {}^t(MX)G(MX) = {}^tX\,{}^tMGMX = {}^tXGX.$$

Définition : (*J - M • Souriau.*"Calcul Linéaire ".*PUF 1964* .)
On note $M_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices d'ordre* **n** , *à coefficients réels et* $GL_n(\mathbb{R})$ *le groupe des matrices inversibles d'ordre* **n** , *à coefficients réels.*
On appele matrice de **Lorentz** *d'ordre* $n \geq 2$ *toute matrice* M *d'ordre* **n** , *à coefficients réels vérifiant :* ${}^tMGM = G$.

Lemme 0 :
Les matrices de **Lorentz** *forment un sous − groupe* **L** *du groupe* $GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme 1 :
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ *tel que* ${}^tXX = 1$.*Soit* **N** *la matrice définie par :*
$\mathcal{O}_{n-1}$ *étant la matrice nulle de* $\mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{R})$,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & \mathcal{O}_{n-1} \end{bmatrix}. \text{ On a alors } \forall \alpha \in \mathbb{R}:$$

$$M = exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X\,{}^tX\right) \end{bmatrix}$$

est une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *de Lorentz de déterminant égal à* **1** .

Lemme 2 :
Si **M** *est une matrice de Lorentz dont la première colonne* K_1 *est de la forme :* $K_1 = {}^t(\alpha, 0, ..., 0)$ *alors* **M** *est de la forme :*

$$M = \begin{bmatrix} \varepsilon & {}^tQ \\ Q & \Omega \end{bmatrix} \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1 \text{ , } {}^tQ = (0, 0, 0), \ {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \ \ (1).$$

Réciproquement toute matrice de cette forme (1) *est de Lorentz .*

Lemme 3 :

Toute matrice carrée **symétrique** A *d'ordre* $n \geq 1$ *, à coefficients* **réels** *, est* **diagonalisable** *.*
De plus les sous − espaces propres de A *sont orthogonaux* 2 *à* 2 *.*
On peut donc écrire que $A = PD\,{}^tP$ *avec* P *matrice orthogonale ,* D *matrice diagonale.*

Lemme 4 :

Soit E *un espace vectoriel de dimension* n *sur* $\mathbb{R}$.
Soit f *et* g 2 *endomorphismes symétriques de* E *qui commutent :* $f \circ g = g \circ f$
alors il existe une même base de vecteurs propres dans laquelle f *et* g *se diagonalisent .*

Lemme 5 :

Soit M *une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice* O *orthogonale et* S *symétrique définie positive telles que* $M = OS$ *.*

Corollaire :

Soit M *une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice* O_1 *orthogonale et* S_1 *symétrique définie positive telles que* $M = S_1 O_1$ *.*
De plus S_1 *et* S *définie au lemme précédent vérifient* $S_1 = MSM^{-1}$ *.*

Théorème 1 :

Toute matrice M *de Lorentz peut se mettre sous la forme :*

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1 ,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & O \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que } : {}^tXX = 1,\ {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^{n-1}} .$$

Cette décomposition est unique .

Matrice de Lorentz en Relativité restreinte :

Soit un observateur ponctuel O *situé dans notre espace physique* E *à* 3 *dimensions ,*
muni d'une horloge .On peut lui attribué un repère à 3 dimension $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *orthormé d'origine lui − même plus une direction temporelle pour le situer dans le temps .*
On fait la convention que tout point fixe par rapport à O *possède une horloge synchronisé avec* O*.On choisit une origine temporelle* t_0 *que l'on va préciser plus bas .*

On peut ainsi construire une base $\mathscr{B}^a{}_{t_0, O}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *.*

Soit le vecteur U *défini par* ${}^tU = (ct, x_1, x_2, x_3)$ *avec* c *la vitesse de la lumière .*

On considère la forme quadratique $\Phi(U) = c^2t^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2$

et construire à partir de $\mathscr{B}^a{}_{t_0, O}$ *une base* **Φ − orthormée** $\mathscr{B}_{t_0, O}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère un autre observateur O' *ayant une vitesse vectorielle* $\vec{V}$ *constante par rapport à* O *.On munit* O' *d'une base* $\mathscr{B}'_{t'_0, O'}(\vec{\tau'}, \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ **Φ − orthonormée**.

On suppose que O *et* O' *se croisent une fois et au moment du croisement mettent à* 0 *leurs horloges respectives :* $t_0 = t'_0 = 0$ *et* $O(0) = O'(0)$ *et*

$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont une origine commune $\boldsymbol{O}$.
$\boldsymbol{U}$ représentant les coordonnées d'un point dans la base $\mathscr{B}_{\boldsymbol{O}}$ et $\boldsymbol{U'}$ les coordonnées de ce même point dans $\mathscr{B}'_{\boldsymbol{O}}$.
On considère aussi la matrice de changement de base $\boldsymbol{M}$ de $\mathscr{B}_{\boldsymbol{O}}$ à $\mathscr{B}'_{\boldsymbol{O}}$ qui sera une **Φ − isométrie : $\boldsymbol{M}$** est une matrice de **Lorentz** telle que : $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{MU'}$.
On peut donc écrire que les coordonnées de

$\boldsymbol{O'}$ dans $\mathscr{B}_{\boldsymbol{O}}$ sont ${}^t\boldsymbol{W} = {}^t(\boldsymbol{ct}, \boldsymbol{tV_1}, \boldsymbol{tV_2}, \boldsymbol{tV_3}) = \boldsymbol{ct}\,{}^t(\boldsymbol{1}, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ avec $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{V}}{c}$

et dans $\mathscr{B}'_{\boldsymbol{O}}$: ${}^t\boldsymbol{W'} = {}^t(\boldsymbol{ct'}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{ct'}\,{}^t(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$.

Lemme 6 : En reprenant les notations précédentes :

$$\boldsymbol{exp}(\alpha \boldsymbol{N}) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \text{ avec } [\gamma\vec{\beta}] \text{ les coordonnées de } \gamma\vec{\beta},\ \vec{\beta} = \boldsymbol{th}(\alpha)\vec{X},$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & {}^t\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X} & \mathscr{O}_{n-1} \end{bmatrix},\ \gamma = \boldsymbol{ch}(\alpha),$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}} .$$

Lemme 7 :
Dans le cas où $\vec{V} // \overrightarrow{Ox} // \overrightarrow{O'x'},\ \overrightarrow{Oy} // \overrightarrow{O'y'},\ \overrightarrow{Oz} // \overrightarrow{O'z'}$, la transformation linéaire $\boldsymbol{M'}$ de $(\boldsymbol{O}, \mathscr{B}_{\boldsymbol{O}})$ dans $(\boldsymbol{O}, \mathscr{B}_{\boldsymbol{O'}})$ a pour composante orthogonale $\overset{\curlywedge}{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{Id}_{\mathbb{R}^4}$ et $\boldsymbol{M'}$

$$\text{se réduit à } \boldsymbol{M'} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \gamma\beta & \gamma & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbb{T}} & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{Id}_{\mathbb{R}^2}} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbb{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Lemme 8 :
Si une matrice de Lorentz $\boldsymbol{M}$ conserve le parallélisme des vecteurs de base spatiaux

et s'il n'y a pas retournement du temps, sa partie orthogonale vérifie $\overset{\wedge}{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{Id}_{\mathbb{R}^4}$.
Si une matrice de Lorentz $\boldsymbol{M}$ *ne conserve pas le parallélisme des vecteurs de base spatiaux,*
et s'il n'y a pas retournement du temps alors $\boldsymbol{M}$ *s'écrira sous la forme* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Lambda}\left(\vec{\boldsymbol{\beta}}\right)\overset{\wedge}{\boldsymbol{\Omega}}$
où $\overset{\wedge}{\boldsymbol{\Omega}}$ *est une matrice orthogonale qui représente l'opérateur qui transforme la base spatiale de départ telle que les vecteurs aprés leur transformation soient parallèles à la base spatiale d'arrivée.*

<u>Corollaire :</u>
Une matrice de Lorentz est symétrique si et seulement si les vecteurs des bases spatiales orthormées de départ et d'arrivée sont parallèles ***2*** *à* ***2***.

Annexe : Démonstration des lemmes énoncés ci − dessus :

Lemme 0 :

Soit $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *2 matrices de* **Lorentz** : ${}^t\boldsymbol{MGM} = \boldsymbol{G}$, ${}^t\boldsymbol{NGN} = \boldsymbol{G}$

Comme $\det({}^tMGM) = \det(G) \Rightarrow \det^2(M) = 1 \neq 0$, $\boldsymbol{M}$ *est donc inversible .*

$Id_{\mathbb{R}^n}$ *est une matrice de* **Lorentz** *donc* $L \neq \varnothing$,

$${}^t(MN)G(MN) = {}^tN({}^tMGM)N = {}^tNGN = G$$ *donc* $\boldsymbol{L}$ *stable pour la composition ,*

$${}^tMGM = G \Rightarrow G = ({}^tM)^{-1}GM^{-1} = (M^{-1})^t\,GM^{-1}$$ *et* $\boldsymbol{L}$ *est stable pour l'inversion .*

Lemme 1 :

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ *tel que* ${}^tXX = 1$ *.Soit* $\boldsymbol{N}$ *la matrice définie par :*

$\mathcal{O}_{n-1}$ *étant la matrice nulle de* $\mathbb{M}_{n-1}(\mathbb{R})$,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & \mathcal{O}_{n-1} \end{bmatrix}$$ *. On a alors* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$M = \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X{}^tX\right) \end{bmatrix}$$

est une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *de Lorentz de déterminant égal à* **1** .

Lemme 1 :

On a $N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0^{n-1} & X{}^tX \end{bmatrix}$ *en notant* 0^{n-1} *la colonne nulle d'ordre* $\boldsymbol{n-1}$,

puisque ${}^tXX = 1$ *et on a* $N^3 = N$.

En remarquant que pour toute matrice carrée $\boldsymbol{A}$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \quad , \quad sh(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad ch(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

donc $$\exp(\alpha N) = Id_{\mathbb{R}^4} + \alpha N + \frac{\alpha^2 N^2}{2!} + \frac{\alpha^3 N}{3!} + \frac{\alpha^4 N^2}{4!} + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\alpha^{2p-1} N}{(2p-1)!} + \frac{\alpha^{2p} N^2}{(2p)!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= Id_{\mathbb{R}^n} + sh(\alpha)N + (ch(\alpha) - 1)N^2 \; .$$

Vérifions que $\boldsymbol{M}$ *est bien de Lorentz :* ${}^t\boldsymbol{MGM} = \boldsymbol{G}$ *?*

On remarque que $\boldsymbol{M}$ *est symétrique :*

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X{}^tX\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & -\left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & -\left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right) \end{bmatrix} \Big[\big[ch(\alpha) \quad sh(\alpha)\,{}^tX\big], \big[(sh(\alpha))X \quad \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right)\big]\Big]$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{.Calculons } \boldsymbol{a, b, c, d}.$$

$a = ch^2(\alpha) - sh^2(\alpha)\,{}^tXX = 1$, *car* ${}^tXX = 1$.

$$b = ch(\alpha)\, sh(\alpha)\,{}^tX - sh(\alpha)\,{}^tX\left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right)$$
$$= ch(\alpha)\, sh(\alpha)\,{}^tX - sh(\alpha)\,{}^tX - sh(\alpha)(ch(\alpha)-1)\,{}^tXX{}^tX$$
$$= ch(\alpha)\, sh(\alpha)\,{}^tX - sh(\alpha)\,{}^tX - sh(\alpha)ch(\alpha)\,{}^tX + sh(\alpha)\,{}^tX = 0,$$

$$c = ch(\alpha)\, sh(\alpha)\, X - \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right)sh(\alpha)\, X$$
$$= ch(\alpha)\, sh(\alpha)\, X - sh(\alpha)\, X - sh(\alpha)\,(ch(\alpha)-1)X = 0,$$

$$d = sh^2(\alpha)X{}^tX - \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right)^2 \qquad \text{or :}$$

$$\left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right)\left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right)$$

$$= Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX + (ch(\alpha)-1)X{}^tX + (ch(\alpha)-1)^2X{}^tXX{}^tX,$$

on remarque comme ${}^tXX = 1 : X({}^tXX){}^tX = X{}^tX$ (*association du produit matriciel*) ,
et $(ch(\alpha)-1)^2 = ch^2(\alpha) - 2ch(\alpha) + 1$

$$= Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + \left(2(ch(\alpha)-1) + ch^2(\alpha) - 2ch(\alpha) + 1\right)X{}^tX$$
$$= Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + \left(ch^2(\alpha) - 1\right)X{}^tX = Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + sh^2(\alpha)X{}^tX$$

finalement :

$$sh^2(\alpha)X{}^tX - \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right)^2 = -Id_{\mathbb{R}^{n-1}}.$$

$$\text{Donc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{bmatrix}$$

*et **M** est bien de **Lorentz** .*
Une autre démonstration possible est de calculer :

$$\exp(\alpha N)G = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & -\left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$G\exp(-\alpha N) = \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha)\,{}^tX \\ -sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & -\left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right) \end{bmatrix}$$

donc $\exp(\alpha N)G = G\exp(-\alpha N) \Rightarrow \exp(\alpha N)G\exp(\alpha N) = G$

comme $M = \exp(\alpha N)$ *est symétrique* ${}^tMGM = G$ *et* M *est de* **Lorentz .**

Pour une troisième démonstration voir : ***J.M. Souriau : Calcul linéaire .PUF .***

Montrons rapidement que $\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}$ *pour* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *:*

Considérons A *comme élément de* $M_n(\mathbb{C})$. A *est alors trigonalisable et peut s'écrire :*

$A = P^{-1}BP$ *avec* B *triangulaire supérieur dont la diagonale est composée des valeurs propres* λ_i *de* A.

en s'appuyant sur la définition de l'exponentielle on peut écrire : $\exp(A) = P^{-1}\exp(B)P$.

En développant $\exp(B)$ *en série et en remarquant que* B^k *triangulaire supérieur* $\forall k \geq 1$.

Alors $\exp(B)$ *a pour diagonale les* e^{λ_i}.

D'où $\det(\exp(A)) = \det(\exp(B)) = \prod_i e^{\lambda_i} = e^{\sum_i \lambda_i} = e^{Tr(A)}$.

Comme αN *est de trace nulle* $\det(\exp(\alpha N)) = 1$.

Lemme 2 :

Soit $M = \begin{bmatrix} \alpha & {}^tL \\ 0 & C \end{bmatrix}$ *avec* $C \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, ${}^tL = (l_1, l_2, l_3)$.

Comme $({}^tMG)M = G$ *on a :*

$$G = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ {}^tL & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & {}^tL \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\, {}^tL \\ \alpha L & L\,{}^tL - {}^tCC \end{bmatrix}$$

par identification $\alpha = \pm 1$, $L = 0$, ${}^tCC = Id_{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Lemme 3 :

Démonstration : (*cf* • *J. Grifone* ."Algèbre Linéaire" .*Cépaduès éditions 2002*)

On note , si $A = (a_{i,j})_{i=1,\, n\,;\, j=1,\, n}$ *alors* ${}^tA = (a_{j,i})_{i=1,\, n\,;\, j=1,\, n}$

et si A *est symétrique* ${}^tA = A$.

(***a***)*Montrons que toute valeur propre de* A *est réelle .*

On peut considérer A *comme un opérateur de* $\mathbb{C}^n$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *et*

$P_A(X)$ *le polynôme caractéristique de* A .*Comme*

polynôme sur $\mathbb{C}$, *il admet au moins une racine* λ , *montrons*

que cette racine est réelle .Soit ${}^tX = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$,

le vecteur propre associé à λ.

Comme A *est symétrique on a , en notant* $\overline{\lambda}$ *et* $\overline{X}$ *les conjugués de* λ *et* X *dans* $\mathbb{C}$*:*

${}^t(AX)\overline{X} = {}^tXA\overline{X}$ *puisque* A *est symétrique .D'autre part* $AX = \lambda X$ *d'où :*

comme A *est réelle* $A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, *il vient* ${}^t(\lambda X)\overline{X} = {}^tX\overline{\lambda}\overline{X}$ *c'est à dire que :*

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \quad \text{d'où } \lambda = \overline{\lambda} .$$

Comme $AX = \lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda}\overline{X} \Rightarrow A\overline{X} = \lambda \overline{X} \Rightarrow A(\overline{X} + X) = \lambda(\overline{X} + X)$

on peut donc associer un vecteur propre réel à λ .*Ou plus simplement remarquer que*

λ *est aussi valeur propre de* A *comme opérateur de* $\mathbb{R}^n$ *dans lui − même .*

Cela implique que tout endomorphisme f, *d'un espace vectoriel réel* E *de dimension* n

dans lui − même , symétrique , admet au moins une valeur propre réelle λ

et un vecteur propre réel x *associé :* $f(x) = \lambda x$.

Rappel : f *est dite symétrique si* $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x \in E \;, \forall y \in E \quad <,>$ *étant*

le produit scalaire euclidien de E .

(***b***)*Montrons par récurrence sur* n , *dimension de* E ,

qu'il existe une base de n *vecteurs propres réels orthogonaux* 2 *à* 2 ,

pour tout endomorphisme symétrique f *d'un espace vectoriel réel* E

de dimension n *dans lui − même .*

Si $n = 1$ *il n'y a rien à démontrer puique dans ce cas* $f = \lambda$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang $n - 1$ *:*

Pour tout endomorphisme symétrique $\boldsymbol{f}$ *d'un espace vectoriel réel* $\boldsymbol{E}$
de dimension $\boldsymbol{n-1}$ *dans lui − même , il existe une base de* $\boldsymbol{n-1}$
vecteurs propres réels, orthogonaux **2 à 2** .
Montrons qu'elle est vraie au rang $\boldsymbol{n}$.
On vient de montrer qu'il existe $\boldsymbol{\lambda}$ *et* $\boldsymbol{x}$ *valeur propre réelle et vecteur propre réel associé pour* $\boldsymbol{f}$ *endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel réel* $\boldsymbol{E}$ *de dimension* $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ *quelconque* .
Considérons le couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ *associé à* $\boldsymbol{E}$ *de dimension* $\boldsymbol{n}$.
Considérons dans $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{x}^{\perp})$ *l'hyperplan orthogonal de* $\boldsymbol{x}$ *dans* $\boldsymbol{E}$ **,**
de dimension $\boldsymbol{n-1}$**.**
Montrons que $\boldsymbol{f}$ *est stable sur* $\boldsymbol{H}$:
Soit $\boldsymbol{y}$ *un vecteur de* $\boldsymbol{H}$: $\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rangle = \boldsymbol{\lambda}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{0}$ *donc* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *est orthogonal à* $\boldsymbol{x}$ **.**
Soit $\boldsymbol{y}$ *et* $\boldsymbol{z}$ **2** *vecteurs de* $\boldsymbol{H}$ *, comme ils sont aussi vecteurs de* $\boldsymbol{E}$ *on a aussi* $\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\rangle$
et la restriction de $\boldsymbol{f}$ *à* $\boldsymbol{H}$ *est aussi symétrique* .
Comme $\boldsymbol{H}$ *est de dimension* $\boldsymbol{n-1}$ *, l'hypothèse de récurrence s'applique : il existe une base de vecteurs propres, dans* $\boldsymbol{H}$ *, pour la restriction de* $\boldsymbol{f}$ *à* $\boldsymbol{H}$: $\boldsymbol{x_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_n}$*, orthogonaux* **2** *à* **2** .
Alors $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_n}$ *est une base de* $\boldsymbol{n}$ *vecteurs propres réels de* f *dans* E :
f *est diagonalisable .Comme* $\boldsymbol{H}$ *est orthogonal à* x *, alors* $\boldsymbol{x_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_n}$ *sont orthogonaux à* $\boldsymbol{x}$.
Les $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_n}$ *, aprés normalisation , forment une base orthonormée de vecteurs propres .Soit* $\mathcal{B}$ *une base de* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}$ *la matrice qui représente* $\boldsymbol{f}$ *dans* $\mathcal{B}$,
$\boldsymbol{P}$ *la matrice composée de colonnes représentant successivement les composantes des* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_n}$, $\boldsymbol{D}$ *la matrice diagonale composée des valeurs propres* $\boldsymbol{\lambda}$ *et* $\boldsymbol{\lambda_i}$ *associées à* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_n}$. *On a donc* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP^{-1}}$ *de plus* $\boldsymbol{P}$ *est une matrice orthogonale et donc* $\boldsymbol{P^{-1}} = {}^{t}\boldsymbol{P}$.
(*Pour d'autres démonstrations consulter J.M. Monier Algèbre 2 Dunod 1997 par exemple*) .
Remarque *: La propriété est fausse si les coefficients de la matrice sont des nombres complexes .Considérons :* $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.
Son polynôme caractéristique est $\boldsymbol{X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2}$ **.**
Si la matrice A était diagonalisable , elle serait semblable à la matrice unité .

<u>Lemme 4</u> : (*cf • J‑M. Monier."Algèbre 2". Dunod 1997*)
Puisque $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$ *sont symétriques ils se diagonalise chacun dans une base orthonormée de vecteurs propres* (***lemme 3***) *.Soit* $\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots\ldots, \boldsymbol{\lambda_p}$ *les valeurs propres de* $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{E_{\lambda_1}}, \ldots\ldots, \boldsymbol{E_{\lambda_p}}$
les espaces propres correspondants .Montrons que $\boldsymbol{E_{\lambda_i}}$ *est stable par* $\boldsymbol{g}$:
Soit $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E_{\lambda_i}}$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda_i x}$ *alors* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\lambda_i g}(\boldsymbol{x})$,
ou bien $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ *ou bien* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ *et* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ *est valeur propre* $\boldsymbol{f}$
et dans les **2** *cas* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{E_{\lambda_i}}$ *donc* $g\left(\boldsymbol{E_{\lambda_i}}\right) \subseteq \boldsymbol{E_{\lambda_i}}$.
On peut définir $\boldsymbol{g_{/E_{\lambda_i}}} : \boldsymbol{E_{\lambda_i}} \to \boldsymbol{E_{\lambda_i}}$ *tel que* $\boldsymbol{g_{/E_{\lambda_i}}}$ *soit un endomorphisme symétrique donc il existe une base* $\mathcal{B}_i$ *ortonormée de* $\boldsymbol{E_{\lambda_i}}$ *constituée de vecteurs propres de* $\boldsymbol{f}$

qui diagonalisent $\boldsymbol{g}_{/E_{\lambda_i}}$.

Comme $\bigoplus_{i=1}^{p} \boldsymbol{E}_{\lambda_i} = \boldsymbol{E}$, $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$ *base de* $\boldsymbol{E}$ *composée de vecteurs propres de* $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$ *qui diagonalisent* $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$.

Si M est de la forme $(\boldsymbol{1})$ *un calcul immédiat montre que* ${}^t\boldsymbol{MGM} = \boldsymbol{G}$ **.**

Lemme 5 :

($cf \cdot$ *R. Mneimé , F. Testard* "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques "
. Hermann Paris 1986 , p 18)

Existence :

${}^t\boldsymbol{MM}$ *est une matrice symétrique définie positive car* ${}^t\left({}^t\boldsymbol{MM}\right) = {}^t\boldsymbol{MM}$ **,**
$\boldsymbol{det}\left({}^t\boldsymbol{MM}\right) = (\boldsymbol{det}(\boldsymbol{M}))^2 > 0$ *car* $\neq \boldsymbol{0}$ **,** $\boldsymbol{M}$ *étant une matrice inversible ,*
de plus ${}^t\boldsymbol{X}\,{}^t\boldsymbol{MMX} = \|\boldsymbol{MX}\|^2 \geq \boldsymbol{0}$ ***avec*** $\|\cdot\|$ *norme euclidienne* **,**
${}^t\boldsymbol{MM}$ *étant symétrique, elle est diagonalisable* $\cdot$ *Si* λ *est une valeur propre de* ${}^t\boldsymbol{MM}$ *,*
elle est différente de $\boldsymbol{0}$ *,* $\boldsymbol{M}$ *étant une matrice inversible et soit* $\boldsymbol{X_\lambda}$
un vecteur propre associé on et si $\lambda < \boldsymbol{0}$ *on aurait* $\|\boldsymbol{MX}\|^2 = {}^t\boldsymbol{X_\lambda}\,{}^t\boldsymbol{MMX_\lambda} = \lambda\,{}^t\boldsymbol{X_\lambda}\boldsymbol{X_\lambda} < \boldsymbol{0}$ *,*
ce qui est impossible , donc on peut écrire :

$$ {}^t\boldsymbol{MM} = \boldsymbol{O_1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\boldsymbol{O_1^{-1}} \text{ avec } \lambda_i > 0 \text{ car } {}^t\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}^{-1}. $$

$$ \text{Soit } \boldsymbol{S} = \boldsymbol{O_1}\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}\boldsymbol{O_1^{-1}}\ , \boldsymbol{S} \text{ est de la forme } \boldsymbol{S} = \boldsymbol{O_1}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{O_1^{-1}}\ ; $$

$\boldsymbol{S}$ *est symétrique :* ${}^t\boldsymbol{S} = {}^t\boldsymbol{O^{-1}}_1\,\boldsymbol{D}\,{}^t\boldsymbol{O_1} = \boldsymbol{O_1}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{O_1^{-1}} = \boldsymbol{S}$ *et* $\boldsymbol{S}$ *est définie positive .*
Soit $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{MS^{-1}}$ *.Montrons que* $\boldsymbol{O}$ *est orthogonale :*
On a ${}^t\boldsymbol{O} = {}^t(\boldsymbol{S^{-1}})\,{}^t\boldsymbol{M} = \left({}^t\boldsymbol{S}\right)^{-1}{}^t\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S^{-1}}\,{}^t\boldsymbol{M}$ *.Donc :*

$$ {}^t\boldsymbol{OO} = \boldsymbol{S^{-1}}\,({}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{S^{-1}} = $$

$$ \boldsymbol{O_1}\begin{bmatrix} \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(\sqrt{\lambda_n}\right)^{-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{O_1^{-1}}\boldsymbol{O_1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} $$

$$O_1^{-1}O_1\begin{bmatrix} \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(\sqrt{\lambda_n}\right)^{-1} \end{bmatrix} O_1^{-1}$$

$= Id_{\mathbb{R}^n}$.

donc O *et* S *répondent à la question .*

Unicité :

Soit P *un polynôme tel que* $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ *pour* $i = 1,..., p$

par exemple le polynôme d'interpolation de Lagrange pour la fonction sur $\mathbb{R}+$ $: f(x) = \sqrt{x}$,

$$P(x) = \sum_{i=1}^{p}\sqrt{\lambda_i}\left(\prod_{j=1,\, j\neq i}^{p}\frac{(x-\lambda_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)}\right),$$

car $\displaystyle\prod_{j=1,\, j\neq i}^{p}\frac{(x-\lambda_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)} = 1$ *si* $x = \lambda_i$ *et* $= 0$ *si* $x = \lambda_j \neq \lambda_i$.

$$P({}^tM M) = P\left(O_1\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} O_1^{-1}\right)$$

$$= O_1 P\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) O_1^{-1} = S.$$

Si $M = OS$ *alors* ${}^tM = SO^{-1}$ *et* ${}^tM M = S^2$

soit S_1 *une autre matrice symétrique , définie positive et* O_1 *une autre matrice orthogonale telle que* $M = O_1S_1$ *alors comme précédemment* $S_1{}^2 = {}^tM M$.

Calculons $S_1{}^tM M = S_1\ S_1{}^2 = S_1{}^2S_1 = {}^tM MS_1$ *donc* S_1 *commute avec* ${}^tM M$ ***et commute*** *donc avec* $P({}^tM M)$ *et donc avec* S *.Donc* S *et* S_1 *sont diagonalisables dans une même base (**lemme 4**).Leurs valeurs propres sont positive non nulles de même carré car* $S_1{}^2 = {}^tM M = S^2$ *donc elles sont égales et* $S_1 = S$ *et donc* $O = O_1$.

Remarque : "définie positive" *est indispensable pour avoir l'unicité :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

<u>Corollaire :</u>

Démonstration : (*F.R. Gantmacher.*"Théorie des matrices" *• Edition J • Gabay 1990.*)

Existence :

On considère $N = M^{-1} = O_N S_N$ *de manière unique d'aprés le* **lemme 3** *,*

S_N *étant symétrique définie positive ,* ${}^t\left(S_N^{-1}\right) = \left({}^tS_N\right)^{-1} = S_N^{-1}$

donc S_N^{-1} *est aussi symétrique donc diagonalisable .*

Soit $x \neq 0$ *un vecteur propre de* S_N^{-1} *et* $\lambda \neq 0$ *la valeur propre associée :*

on a $x = S_N \cdot S_N^{-1} \cdot x = S_N \cdot \lambda \cdot x$ *et donc* $S_N^{-1}x$ *est vecteur propre de* S_N *,*

et $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ *est valeur propre de* S_N *donc* $\lambda > 0$ *et* S_N^{-1} *est symétrique définie positive.*

Comme O_N *étant orthogonale* ${}^tO_N = O_N^{-1}$ *,* O_N^{-1} *est aussi orthogonale .*

On peut donc écrire $M = S_N^{-1} O_N^{-1}$ *.*

On peut aussi considérer $N' = {}^tM = O_{N'} S_{N'}$ *, et donc* $M = {}^tS_{N'} {}^tO_{N'} = S_{N'} {}^tO_{N'} = S_{N'} O_{N'}^{-1}$ *.*

Unicité :

Supposons que $M = OS = O'S'$ *avec* $S \neq S'$ *on aura par exemple* $M^{-1} = S^{-1}O^{-1} = S'^{-1}O'^{-1}$ *,*

Des équivalences $\left((S = S') \Leftrightarrow \left(S^{-1} = S'^{-1}\right) \right) \Leftrightarrow \left((S \neq S') \Leftrightarrow \left(S^{-1} \neq S'^{-1}\right) \right)$

on en déduirait que M^{-1} *aurait* **2** *décompositions différentes ce qui est contraire au lemme* **5,**

donc la décomposition $M = OS$ *est bien unique* **.**

Supposons maintenant que grâce à ce qui précède on ait $M = OS = S_1 O_1$ *on en en déduit que*

${}^tMM = S^2$ *et* $M\,{}^tM = S_1^2$ *.*

Vérifions d'abord que ${}^tMM$ *et* $M\,{}^tM$ *ont mêmes valeurs propres* :

${}^tMM$ *étant symétrique* **,** *elle est diagonalisable dans une base orthormée de vecteurs propres* :

$\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$ *associées au valeurs propres* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *avec* $\lambda_i > 0$ *,* $\forall\ i$ *.*

On a si ${}^tMMX_i = \lambda_i X_i$ *et donc* ${}^tX_j {}^tMMX_i = {}^t\left(MX_j\right)\left(MX_i\right) = {}^tX_j\left(\lambda_i X_i\right) = \lambda_i \delta_j^i$

ce qui implique que ${}^t\left(MX_i\right)\left(MX_i\right) = \left\|MX_i\right\|^2 = \lambda_i > 0$ *et comme*

$M\,{}^tM\left(MX_i\right) = M\left({}^tMMX_i\right) = \lambda_i\left(MX_i\right)$ λ_i *est bien valeur propre de* $M\,{}^tM$

avec MX_i *comme vecteur propre* ($\neq 0$) *associé .*

$$\text{On a vu que } S = \Omega_1 \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \Omega_1^{-1},$$

On a aussi vu que $M = S_{{}^tM}\, {}^tO_{{}^tM} = S_1 O_1$**.***Comme* ${}^tMM$ *et* $M\,{}^tM$ *ont mêmes valeurs propres :*

$$S_1 = S_{{}^tM} = (M\Omega_1)\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}(M\Omega_1)^{-1} \text{ et donc } S_1 = MSM^{-1}.$$

Pour une autre démonstration de ces formules voir :
(*J − B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec.*"Exercices Algèbre linéaire" *• Cepadues éditions 1988*)

Cas où M n'est pas inversible :
(*R. Mneimé , F. Testard* "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ".
Hermann Paris 1986 , p 19)
On remarque tout d'abord que $GL_n(\mathbb{R})$ *est dense dans* $M_n(\mathbb{R})$:
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda_0 = \min\left(|\lambda_i| / \lambda_i \text{ valeur propre de } M\right)$ *et considérons les matrices inversibles* $M - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$, *avec* $0 < \lambda < \lambda_0$, *qui tendent vers* M *lorsque* $\lambda \to 0.$
On peut donc considérer une suite (M_i) *de matrice inversibles qui tend vers* M.
D'aprés ce qui précède $M_i = O_iS_i$ *avec* O_i *orthonormale et* S_i *symétrique .*
On remarque $O_n(\mathbb{R}) = \{O \mid O \text{ orthormale}\}$ *est compact dans* $M_n(\mathbb{R})$:

Si $O \in O_n(\mathbb{R})$ *et* ρ *le rayon spectral* $\|O\|_2 = \rho^{\frac{1}{2}}({}^tOO) = \rho^{\frac{1}{2}}(Id_{\mathbb{R}^n}) = \sqrt{n}$,
donc est borné dans $M_n(\mathbb{R})$ *.D'autre part soit* $\Phi : M \to {}^tMM$ *définie sur* $M_n(\mathbb{R})$,
qui est une application continue dans $M_n(\mathbb{R})$ *et on remarque que* $\Phi^{-1}(Id_{\mathbb{R}^n}) = O_n(\mathbb{R})$
par définition même d'une matrice orthormale .Donc $O_n(\mathbb{R})$ *est fermé dans* $M_n(\mathbb{R})$
et donc compact .
De la suite des (O_i) *on peut donc extraire une sous − suite convergente* $\left(O_{i_k}\right)$ *convergente vers la matrice* O *qui est orthonormale car* $O_n(\mathbb{R})$ *est fermé dans* $M_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que la suite de terme général $S_{i_k} = {}^tO_{i_k}M_{i_k}$ *est convergente vers une matrice* S *symétrique* (*considérer les composantes*) *et*
$M = OS$ *avec les propriétés requises.*
Puisque O *est inversible le rang de* S *est égal au rang de* M, *que l'on suppose inférieur strictement à* n.O *n'est déteminé par* M *que sur l'image de* S *d'où l'impossibilité de démontrer l'unicité.*
Remarque : *L'identité est le seul opérateur à la fois symétrique défini positif et orthormal .*
Il suffit d'écrire : si $A = {}^tA$, A *définie positif et* ${}^tAA = Id \Rightarrow A^2 = Id$ *or* $Id = Id \circ Id$, *si* $A \neq Id$ *cela impliqerait que* Id *a* 2 *décompositions différentes .*

<u>Théorème 1</u> :
Soit M une matrice de Lorentz $M = (m_{i,j})$ *et* M_1 *la première colonne de* M.
Si $M_1 = (m_{i,1})$ *alors* :

$${}^tM_1GM_1 = m_{1,1}^{\;2} - m_{1,2}^{\;2} - \dots - m_{1,n}^{\;2} = G_{1,1} = 1 .$$

On peut poser ${}^tM_1 = (\beta, Y)$ *avec* $\beta = m_{1,1}$ *et* ${}^tY = (m_{1,2}, \dots, m_{1,n})$.

On a donc $\beta^2 - {}^tYY = 1$ *donc* $|\beta| \geq 1$ *.On peut poser* $\beta = \varepsilon \cdot ch(\alpha)$ *avec* $\varepsilon = \pm 1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ **.**

De plus ${}^tYY = \beta^2 - 1 = sh^2(\alpha)$ **.**

Si $\alpha \neq 0$ *posons* $X = \dfrac{Y}{\varepsilon \cdot sh(\alpha)}$, *on a* ${}^tXX = 1$.

Si $\alpha = 0$ *on a* ${}^tM_1 = (\varepsilon, 0, 0, 0)$ ..

Dans tous les cas ${}^tM_1 = \varepsilon(ch(\alpha), sh(\alpha)X)$ **avec** ${}^tXX = 1$.

d'après le ***lemme 1***, M_1 *est la première colonne de* $\varepsilon \cdot exp(\alpha N)$ *avec*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & O \end{bmatrix}$$

On remarque que $exp(-\alpha N) \cdot M$ *est une matrice de Lorentz puisque* M *et* $exp(-\alpha N)$ *le sont .Calculons la première colonne* K_1 *de ce produit :*

$$K_1 = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & (sh(-\alpha))\,{}^tX \\ (sh(-\alpha))X & Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X{}^tX \end{bmatrix} \cdot M_1$$

En remarquant que ${}^tXX = 1$, $ch^2(\alpha) - sh^2(\alpha) = 1$ *, et que*

$\left(Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X{}^tX\right) \cdot X = ch(\alpha) \cdot X$ *car* $(X{}^tX)X = X({}^tXX)$

on obtient : ${}^tK_1 = (\varepsilon, 0, .., 0)$*.On peut alors appliquer le lemme* **2** :

$$M = exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}.$$

αN *étant une matrice symétrique***,** *donc diagonalisable :* $\alpha N = {}^tPDP$ **,** P *étant orthogonale , et donc* $exp(\alpha N) = exp({}^tPDP) = {}^tPexp(D)P$ *et* $exp(\alpha N)$ *est symétrique définie positive •On a donc décomposé* M *en un produit d'une matrice définie positive et d'une matrice orthogonale •Il suffit d'appliquer le corollaire du lemme* **5** *pour avoir l'unicité .*

Lemme 6 :

On remarque d'abord que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$ *donc* $W = exp(\alpha N)\, W'$.

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha)-1)X{}^tX\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t' = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} t \quad ,$$

cela entraine que $t \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = t' \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix}$ *et donc* $t = ch(\alpha)t'$ *d'où :*

$$ch(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \;\Rightarrow\; ch(\alpha)\vec{\beta} = sh(\alpha)\vec{X} \;,$$

donc $\vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = th^2(\alpha)$ *puisque* $\vec{X}^2 = 1$.

On pose $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$ *et* $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$.

Comme $1 - th^2(\alpha) = \dfrac{1}{ch^2(\alpha)} \Rightarrow ch^2(\alpha) = \dfrac{1}{1-th^2(\alpha)} = \dfrac{1}{1-\vec{\beta}^2} = \gamma^2$,

comme $ch(\alpha) \geq 1$ $\gamma = ch(\alpha)$; *comme* $sh^2(\alpha) = ch^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$

$= \dfrac{1}{1-\vec{\beta}^2} - 1 = \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma^2\beta^2$.

En résumé on a $\gamma = ch(\alpha)$, $\gamma^2\beta^2 = sh^2(\alpha)$, $\beta^2 = th^2(\alpha)$.

D'autre part :

$$\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma+1)(\gamma-1) \;\Rightarrow\; \frac{\gamma^2\beta^2}{(1+\gamma)} = (\gamma-1) = ch(\alpha) - 1$$

et $X_iX_j = \dfrac{(\beta_i\beta_j)}{th^2(\alpha)} = \dfrac{(\beta_i\beta_j)}{\beta^2}$ *donc*

$$(ch(\alpha)-1)X_iX_j = \frac{\gamma^2\beta^2}{(1+\gamma)}\frac{(\beta_i\beta_j)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_i\beta_j$$ *, ce qui permet d'écrire que :*

$$Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha)-1)X^tX = \begin{bmatrix} 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta^2_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta^2_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta^2_3 \end{bmatrix} = C$$

Comme $sh(\alpha)X_i = \dfrac{sh(\alpha)\beta_i}{th(\alpha)} = ch(\alpha)\beta_i = \gamma\beta_i$ *on a finalement :*

$$exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & C \end{bmatrix}$$ *avec* $[\gamma\vec{\beta}]$ *les coordonnées de* $\gamma\vec{\beta}$.

On remarque que l'inverse de $exp(\alpha N)$ *est* $exp(-\alpha N)$ *, il suffit de remplacer* $\vec{\beta}$ *par* $-\vec{\beta}$ *pour obtenir l'inverse en remarquant que* γ *et* C *sont inchangés .*

Si $\vec{\beta}\,//\,\vec{i}$ *alors un seul terme de* C *est non nul :* $1+\dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta^2_1$

$$= \frac{\left((1+\gamma)+\gamma^2\vec{\beta}^2\right)}{(1+\gamma)} = \frac{1+\gamma+\gamma^2-1}{(1+\gamma)} = \gamma \text{ car}$$

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{1-\vec{\beta}^2} - 1 = \frac{\vec{\beta}^2}{1-\vec{\beta}^2} = \gamma^2\vec{\beta}^2.$$

Remarque : (1) *Comme* $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$ *on peut remplacer* $\delta^i_j + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_i\beta_j$ *par* $\delta^i_j + (\gamma-1)\dfrac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}$

dans l'évaluation de $Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha)-1)X^tX$ *car* $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \dfrac{(\gamma-1)}{\beta^2}$.

(2) $\gamma\cdot(1+\beta) = \gamma + \sqrt{(\gamma)^2 - 1}$ *car :*

$$1-(\beta)^2 = \frac{1}{(\gamma)^2} \Leftrightarrow (\beta)^2 = 1 - \frac{1}{(\gamma)^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{(\gamma)^2}} \Leftrightarrow \gamma\cdot\beta = \sqrt{(\gamma)^2-1}.$$

Donc $\dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-(\beta)^2}} = \gamma + \sqrt{(\gamma)^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} = \gamma + \sqrt{(\gamma)^2-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \ln\left(\gamma + \sqrt{(\gamma)^2 - 1}\right);$$

et on retrouve que $\mathbf{argth}(\beta) = \mathbf{argcosh}(\gamma) = \alpha$ *car* $\gamma = \mathbf{ch}(\alpha)$ *et* $\beta = \mathbf{th}(\alpha)$.

$(\mathbf{3})$ *Maintenant on va évaluer* $\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$.

Comme $\varepsilon = -1$ *serait un retournement du temps on fait le choix* $\varepsilon = 1$ **.**

Evaluation de $\varepsilon = \pm 1$ **:**

Comme

$$W = MW' = \exp(\alpha N)\,\hat{\Omega} W' = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \gamma\varepsilon & {}^t[\gamma\vec{\beta}]\Omega \\ \varepsilon[\gamma\vec{\beta}] & C\Omega \end{bmatrix} W'$$

avec ${}^tW = {}^t(ct, tV_1, tV_2, tV_3)$, ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ *.On en déduit que* $t = \varepsilon \cdot \gamma \cdot t'$ **.**

Donc si $\varepsilon = -1$ *, il y aurait un renversement du temps .*

Par la suite on suppose que $\varepsilon = +1$ **.**

Reste à évaluer Ω *.Remarquons tout d'abord que si* M *est symétrique* $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$

car $M = S\hat{\Omega} = M\,Id_{\mathbb{R}^4}$ *avec* S *symétrique définie positive , par unicité de la décomposition* $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Pour le cas général évaluons d'abord directement un cas particulier .

Lemme 7 :
***Démonstration 1** :*

Si $\overrightarrow{V} // \overrightarrow{Ox} // \overrightarrow{O'x'}$ *de même sens,* $\overrightarrow{Oy} // \overrightarrow{O'y'}$ *de même sens,,* $\overrightarrow{Oz} // \overrightarrow{O'z'}$ *de même sens,*

$$M \text{ s'écrit sous la forme } M = M' \cdot \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathbb{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \cdot \hat{\Omega}$$

$$\text{avec } \beta = \beta_x,\ \mathbb{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \Omega \text{ est une matrice orthogonale d'ordre } 3 .$$

On remarque que M' *conserve les directions spatiales et donc* $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$.
Ou en faisant les calculs :

$$\text{Si } M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \omega_{2,4} \\ 0 & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} & \omega_{3,4} \\ 0 & \omega_{4,2} & \omega_{4,3} & \omega_{4,4} \end{bmatrix},\ X1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ X2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } X3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ on a :}$$

$$M'\hat{\Omega}X1 = \begin{bmatrix} \gamma\beta\,\omega_{2,2} \\ \gamma\,\omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{4,2} \end{bmatrix},\ M'\hat{\Omega}X2 = \begin{bmatrix} \gamma\beta\,\omega_{2,3} \\ \gamma\,\omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} \text{ et } M'\hat{\Omega}X3 = \begin{bmatrix} \gamma\beta\,\omega_{2,4} \\ \gamma\,\omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix} \text{ d'où :}$$

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

Comme Ω *est orthogonal et les sens étant conservés* $\hat{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$.

Démonstration 2 : (*cf. C.Semay B.Silvestre − Brac*. "Relativité restreinte". *Dunod 2010, p30*)

On recherche à évaluer la transformation linéaire $\boldsymbol{M}$ *de* $(\boldsymbol{O}, \mathscr{B}_{\boldsymbol{O}})$ *dans* $(\boldsymbol{O}, \mathscr{B}'_{\boldsymbol{O}})$ *qui respecte :*

$\boldsymbol{c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2,\ ct = Act' + Bx',\ x = Cct' + Dx',\ y = y',\ z = z'}$

avec $\boldsymbol{A, B, C, D}$ *4 constantes à déterminer.*

$\boldsymbol{c^2t^2 - x^2 = (Act' + Bx')^2 - (Cct' + Dx')^2}$, *par identification :*

$\boldsymbol{A^2 - C^2 = 1,\ D^2 - B^2 = 1,\ AB - CD = 0.}$

On pose $\boldsymbol{A^2 = ch^2(\theta)}$ *d'où* $\boldsymbol{C^2 = sh^2(\theta)}$, $\boldsymbol{D^2 = ch^2(\varphi)}$ *d'où* $\boldsymbol{B^2 = sh^2(\varphi)}$;

Si on suppose qu'il n'y a pas inversion de temps pour $\boldsymbol{x' = 0}$ *dans*

$\boldsymbol{ct = Act' + Bx' : A = ch(\theta)}$. *De plus :*

$\boldsymbol{C = \pm sh(\theta),\ B = \pm sh(\varphi)}$ *et* $\boldsymbol{D = \pm ch(\varphi)}$;

De $\boldsymbol{AB - CD = 0 = \pm ch(\theta) sh(\varphi) \pm sh(\theta) ch(\varphi)}$.

Il y a **4** *possibilités :*

$\boldsymbol{ch(\theta) sh(\varphi) + sh(\theta) ch(\varphi) = sh(\theta + \varphi) = 0}$,

$\boldsymbol{-ch(\theta) sh(\varphi) - sh(\theta) ch(\varphi) = -sh(\theta + \varphi) = 0}$,

$\boldsymbol{-ch(\theta) sh(\varphi) + sh(\theta) ch(\varphi) = sh(\theta - \varphi) = 0}$,

$\boldsymbol{ch(\theta) sh(\varphi) - sh(\theta) ch(\varphi) = -sh(\theta - \varphi) = 0}$,

d'où $\boldsymbol{AB - CD = 0 \Leftrightarrow sh(\theta + \varphi) = 0}$ *et* $\boldsymbol{sh(\theta - \varphi) = 0}$,

d'où $\boldsymbol{\theta = \pm \varphi}$.

D'où $\boldsymbol{A = ch(\theta) = ch(\pm\varphi) = ch(\varphi) = \pm D}$,

de même $\boldsymbol{B = \pm C}$.

$\boldsymbol{M}$ *étant une matrice de Lorentz elle vérifie :* $\boldsymbol{AD - BC = \pm 1}$.

(**1**) *Si* $\boldsymbol{AD - BC = +1 \Leftrightarrow \pm ch(\theta) ch(\theta) \pm sh(\theta) sh(\theta) = 1}$,

la seule possibilité étant $\boldsymbol{ch^2(\theta) - sh^2(\theta) = 1}$, ***d'où :***

$\boldsymbol{A = D = ch(\theta),\ B = C = \pm sh(\theta)}$. *Quitte à remplacer* $\boldsymbol{\theta}$ *par* $\boldsymbol{-\theta}$

on obtient les relations : $\boldsymbol{ct = ch(\theta) ct' + sh(\theta) x'}$

$$\boldsymbol{x = sh(\theta) ct' + ch(\theta) x'.}$$

(**2**) *Si* $\boldsymbol{AD - BC = -1}$ *on obtient les mêmes relations.*

Si on considère $\boldsymbol{O'}$ *dans la base* $\mathscr{B}_{\boldsymbol{O'}}$, *ces coordonnées sont* $\boldsymbol{{}^t(ct', 0, 0, 0)}$,

et dans $\mathscr{B}_{\boldsymbol{O}}$, $\boldsymbol{{}^t\left(ct, \left\|\vec{V}\right\| t, 0, 0\right)}$, $\boldsymbol{\vec{V}}$ *étant la vitesse uniforme de* $\boldsymbol{O'}$ *par rapport à* $\boldsymbol{O}$.

On en déduit que : $\boldsymbol{ct = ct' ch(\theta)}$ *et* $\boldsymbol{\left\|\vec{V}\right\| t = sh(\theta) ct'}$ *d'où :*

Si $\boldsymbol{\dfrac{\left\|\vec{V}\right\|}{c} = \beta = th(\theta)}$, *on en déduit que* $\boldsymbol{ch(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma}$ *et*

$$\boldsymbol{sh(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\beta.}$$

D'où finalement : $\boldsymbol{ct = \gamma ct' + \gamma\beta x' = \gamma(ct' + \beta x')}$

$$\boldsymbol{x = \gamma\beta ct' + \gamma x' = \gamma(\beta ct' + x')}$$
$$\boldsymbol{y = y'}$$
$$\boldsymbol{z = z'}.$$

Notons $\boldsymbol{M'}$ *la matrice qui représente cette transformation :*

$$M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathbb{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbb{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : *Tout calcul fait on a :*

$$M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Donc les valeurs propres de M' *sont* $\gamma\cdot(1+\beta)$, $\gamma\cdot(1-\beta)$, 1.
En se servant des remarques du lemme **6** *on a :*

$$\gamma\cdot(1+\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \text{ et donc que } \gamma\cdot(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

De plus $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \operatorname{argth}(\beta) = \alpha$, *les valeurs propres de* M' *peuvent s'écrire :*

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right) = e^{\alpha}, \quad \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right) = e^{-\alpha} \text{ et } 1.$$

***Lemme 8** :*

Démonstration :

Considérons le shéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}' \\ P\downarrow & & \downarrow P \\ \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{M'} & \mathcal{B}'_1 \end{array}$$

$\mathcal{B}$ *est une base spatio-temporelle orthonormée associé à l'observateur* O,
$B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *étant la sous-base spatiale de* $\mathcal{B}$.
$\mathcal{B}'$ *est une base spatio-temporelle orthonormée associé à l'observateur* O',
$B'(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ *étant la sous-base spatiale de* $\mathcal{B}'$.
O' *a une vitesse uniforme* $\vec{V}$ *par rapport à* O.
Contrairement au lemme précédent $\vec{V}$ *n'est pas forcément parallèle à* $\vec{i}$ *mais par contre* $\vec{i} \,//\, \vec{i}'$, $\vec{j} \,//\, \vec{j}'$ *et* $\vec{k} \,//\, \vec{k}'$ *malgré le mouvement de* O'.
$\mathcal{B}_1$ *est une base associée à* O *telle que sa sous-base spatiale* $B_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ *est une sous-base orthogonale telle que* $\vec{i}_1 \,//\, \vec{V}$, *obtenue par une rotation.*
Soit $Q = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ *la matrice orthogonale de changement de base et* $P = {}^tQ$.

De la même manière $\boldsymbol{Q = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)}$ • *On a donc :* $\vec{i_1} // \vec{i'_1} // \vec{V}, \vec{j_1} // \vec{j_1'}$ *et* $\vec{k_1} // \vec{k_1'}$.
M '*est la matrice de Lorentz de passage de* $\mathcal{B}_1$ *à* $\mathcal{B}'_1$.

Par construction $\boldsymbol{M' = {}^tPMP = {}^tP\big(\Lambda(\vec{\beta})\,\overset{\curlywedge}{\Omega}\big)P}$ (*lemme* **6**) *où* $\Lambda(\vec{\beta})$ *est symétrique , définie positive* $\overset{\curlywedge}{\boldsymbol{\Omega}}$ *est orthogonal et cela d'une manière unique* • *De plus* **M '** *est symétrique, définie positive* (*lemme 7*) *et on peut toujours écrire* $\boldsymbol{{}^tP\big(\Lambda(\vec{\beta})\,\overset{\curlywedge}{\Omega}\big)P = \big({}^tP\Lambda(\vec{\beta})P\big)\big({}^tP\overset{\curlywedge}{\Omega}P\big)}$.
On remarque que $\boldsymbol{{}^tP\Lambda(\vec{\beta})P}$ *est symétrique et que* $\boldsymbol{{}^tP\overset{\curlywedge}{\Omega}P}$ *est orthogonal car*
$\boldsymbol{{}^t\big({}^tP\overset{\curlywedge}{\Omega}P\big)\big({}^tP\overset{\curlywedge}{\Omega}P\big) = Id_{\mathbb{R}^4}}$ • *En résumé :* $\boldsymbol{M' = M' \cdot Id_{\mathbb{R}^4} = \big({}^tP\Lambda(\vec{\beta})P\big)\big({}^tP\overset{\curlywedge}{\Omega}P\big)}$.
Par unicité de la décomposition $\boldsymbol{{}^tP\overset{\curlywedge}{\Omega}P = Id_{\mathbb{R}^4}}$ (*et* $\boldsymbol{M' = \big({}^tP\Lambda(\vec{\beta})P\big)}$) .
On en déduit que $\boldsymbol{\overset{\curlywedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}}$.
On a :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{PM'\,{}^tP},$$

où **P** *est une matrice orthogonale ,* **M** *a donc les mêmes valeurs propres que* **M '**.

Considérons une matrice de Lorentz **M** *ayant les propriété de la seconde partie de l'énoncé.*
Soit le shéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\boldsymbol{M}} & \mathcal{B}' \\ \boldsymbol{P}\downarrow & \nearrow \boldsymbol{M''} & \\ \mathcal{B}_1 & & \end{array}$$

$\mathcal{B}_1$ *est une base associée à* **O** *telle que sa sous-base spatiale* $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ *est une sous-base orthogonale dont ses vecteurs de bases sont parallèles à la base spatiale mobile* $\boldsymbol{B'}(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ *, sous-base spatiale de* $\mathcal{B}'$.
Soit $\boldsymbol{Q = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)}$ *la matrice orthogonale de changement de base et* $\boldsymbol{P = {}^tQ}$.
D'aprés ce qui précéde $\boldsymbol{M'' = \Lambda(\vec{\beta})}$ *et donc* $\boldsymbol{M = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot P}$.
On peut expliciter **P** *sous la forme suivante :*
En se restreignant au sous − espace spatial $\boldsymbol{Q(\vec{i}) = \vec{i_1}, Q(\vec{j}) = \vec{j_1}}$ *et* $\boldsymbol{Q(\vec{k}) = \vec{k_1}}$ *or si* $<,>$ *est le produit scalaire euclidien ,* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *étant orthonormées :*
$\vec{i_1} = \langle \vec{i_1}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{i_1}, \vec{j} \rangle \vec{j} + \langle \vec{i_1}, \vec{k} \rangle \vec{k}$, $\vec{j_1} = \langle \vec{j_1}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{j_1}, \vec{j} \rangle \vec{j} + \langle \vec{j_1}, \vec{k} \rangle \vec{k}$ *et*

$\overrightarrow{k_1} = \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{j} \rangle \vec{j} + \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{k} \rangle \vec{k}$ *et* $\boldsymbol{P}$ *peut s'écrire :*

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \overrightarrow{i_1}, \vec{i} \rangle & \langle \overrightarrow{j_1}, \vec{i} \rangle & \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{i} \rangle \\ 0 & \langle \overrightarrow{i_1}, \vec{j} \rangle & \langle \overrightarrow{j_1}, \vec{j} \rangle & \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{j} \rangle \\ 0 & \langle \overrightarrow{i_1}, \vec{k} \rangle & \langle \overrightarrow{j_1}, \vec{k} \rangle & \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{k} \rangle \end{bmatrix}.$$

On peut alors expliciter complétement une matrice de Lorentz sans retournement de temps, si $\boldsymbol{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *est la base spatiale associée à* $\boldsymbol{O}$ *et si* $\boldsymbol{B'}(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ *est la base spatiale associée à* $\boldsymbol{O'}$, $(\tilde{\beta}_i)$ *étant les coordonnées de* $\vec{\beta}$ *dans* $\boldsymbol{B_1}(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$ *et* $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}\cdot\vec{\beta}}}$:

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\tilde{\beta}_1 & \gamma\tilde{\beta}_2 & \gamma\tilde{\beta}_3 \\ \gamma\tilde{\beta}_1 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}^2_1 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_3 \\ \gamma\tilde{\beta}_2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}_2\tilde{\beta}_1 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}^2_2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}_2\tilde{\beta}_3 \\ \gamma\tilde{\beta}_3 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_1 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}_3\tilde{\beta}_2 & 1 + \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\tilde{\beta}^2_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \overrightarrow{i_1}, \vec{i} \rangle & \langle \overrightarrow{i_1}, \vec{j} \rangle & \langle \overrightarrow{i_1}, \vec{k} \rangle \\ 0 & \langle \overrightarrow{j_1}, \vec{i} \rangle & \langle \overrightarrow{j_1}, \vec{j} \rangle & \langle \overrightarrow{j_1}, \vec{k} \rangle \\ 0 & \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{i} \rangle & \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{j} \rangle & \langle \overrightarrow{k_1}, \vec{k} \rangle \end{bmatrix}$$

Cela montre que $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{B'}$ *sont composées de vecteurs parallèles* **2** *à* **2** *le second membre se réduit à l'identité d'où le corollaire.*

Lorsque que $\boldsymbol{M}$ *est de la forme* $\boldsymbol{M} = \Lambda(\vec{\beta})\boldsymbol{P}$, *il se peut que* $\boldsymbol{M}$ *ne soit pas diagonalisable dans* $\mathbb{R}$:
prendre $\Lambda(\vec{\beta}) = \boldsymbol{Id}$ *et* $\boldsymbol{\Omega}$ *une rotation de* $\mathbb{R}^3$ *non diagonalisable dans* $\mathbb{R}$.

Classification des matrices de Lorentz .

Nous avons vu que l'ensemble des matrices de Lorentz $\mathcal{Lo}$ *d'ordre* $\boldsymbol{n}$ *forment un sous − groupe de* $\boldsymbol{GL}_4(\mathbb{R})$*, le groupe des matrices inversibles pour la composition .*

Nous avons vu que la partie symétrique d'une matrice de Lorentz $\boldsymbol{M}$ *:*

dans l'écriture la plus générale :

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{exp}(\alpha N)\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \Omega\end{bmatrix} \text{ où } \alpha\in\mathbb{R},\ N=\begin{bmatrix}0 & {}^tX\\ X & O\end{bmatrix},\ X\in\mathbb{R}^3$$

$$\text{Comme } {}^t\boldsymbol{MGM}=\boldsymbol{G} \text{ avec } \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & {}^t0\\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^3}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{det}(\boldsymbol{M})=\pm 1.$$

$$\text{Or } \boldsymbol{det}(\boldsymbol{exp}(\alpha N))=e^{Tr(\alpha N)}=e^0=1 \text{ donc}$$

$$det(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{det}\left(\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \Omega\end{bmatrix}\right)=\varepsilon\cdot\boldsymbol{det}(\Omega)\ .$$

(*1*) ***Détermination de det***(Ω) ***:***

Ω *est une matrice orthogonale :* ${}^t\Omega\Omega=Id_{\mathbb{R}^3}$ *donc* $\boldsymbol{det}(\Omega)=\pm 1$.

On rappelle les définitions suivantes :

(***a***) *Dans un espace euclidien* $\boldsymbol{E}$ *de dimension* $\boldsymbol{3}$*, on appelle symétrie orthogonale par rapport à un sous − espace* $\boldsymbol{F}$ *l'endomorphisme* $s_F=2\,p_F-Id_E$

avec p_F *le projecteur orthogonal sur F .*

(***b***) *Dans un espace euclidien* $\boldsymbol{E}$ *de dimension* $\boldsymbol{3}$*, on appelle réflexion par rapport à un sous − espace* $\boldsymbol{F}$ *de dimension* $\boldsymbol{2}$ *toute symétrie orthogonale par rapport à* $F\neq E$ ***.***

(***c***) *Dans un espace euclidien* $\boldsymbol{E}$ *de dimension* $\boldsymbol{3}$*,* $\boldsymbol{F}$ *un sous − espace de* $\boldsymbol{E}$*,* $F\neq E$*, muni d'une base orthormée* $\mathcal{B}_F(e_1,\dots,e_p)$ *qu'on complète pour avoir une base de* $\boldsymbol{E}$ *:*

soit $\mathcal{B}_E(e_1,\dots,e_3)$ *, on a alors :*

$$\boldsymbol{Mat}_F(p_F)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ si } F \text{ est de dimension } 2 \text{ ou } =\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \text{si } F \text{ est de dimension } 1.$$

$$\text{et } \boldsymbol{Mat}_F(s_F)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \text{si } F \text{ est de dimension } 2 \text{ ou } =\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \text{si } F \text{ est de dimension } 1.$$

$$\text{Si } \boldsymbol{det}(\Omega)=+1 \quad \Omega \text{ est un rotation : } \Omega=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\0&\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

sinon $\boldsymbol{det}(\Omega)=-1$ *alors* Ω *est une réflexion de* $\mathbb{R}^3$ *ou la composition d'une rotation et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de cette rotation .*

(pour plus de détail voir : J-M. Monier."Algèbre 1"*. Dunod 1997 .)* .

On dira que $\boldsymbol{M}$ *est une rotation si* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{M}) = +1$. *Sinon* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{M}) = -1$ *et alors on dira que* $\boldsymbol{M}$ *est un retournement*. (*Il faut faire attention que la définition dans un espace de dimension* **3** *est différente.*)

(*2*) ***Détermination de*** $\boldsymbol{\varepsilon}$ **:**

Soit $\boldsymbol{V_0}$ *un vecteur de temps non nul* $\boldsymbol{{}^tV_0GV_0 > 0}$ *et* $\boldsymbol{M}$ *une matrice de Lorentz. On a :*

$\boldsymbol{{}^t(MV_0)G(MV_0) = {}^tV_0\,({}^tMGM)\,V_0 = {}^tV_0GV_0 > 0}$ *donc* $\boldsymbol{MV_0}$ *est aussi un vecteur de temps.*

Soit $\boldsymbol{\eta = signe\,\left({}^tV_0G(MV_0)\right)}$ ***si*** $\boldsymbol{\eta = 1}$, V *et* $(\boldsymbol{MV_0})$ *appartiennent à la même classe sinon* $\boldsymbol{\eta = -1}$, V *et* $(\boldsymbol{MV_0})$ *appartiennent à des classes différentes* (*Voir chapitre IV*).

Soit maintenant V un autre vecteur de temps non nul • Comme précédemment MV est ausi un vecteur de temps.

Comme $\boldsymbol{{}^t(MV)G(MV_0) = {}^tV\,({}^tMGM)\,V_0 = {}^tVGV_0}$, *on a l'équivalence :*

$\boldsymbol{Classe}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{Classe}(\boldsymbol{V_0}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Classe}(\boldsymbol{MV}) = \boldsymbol{Classe}(MV_0)$.

Donc $\boldsymbol{\eta}$ *ne dépend que de* $\boldsymbol{M}$ *et est indépendant de* $\boldsymbol{V}$.

Calculons $\boldsymbol{\eta}$ *pour le vecteur* $\boldsymbol{E_0} = {}^t(\boldsymbol{1, 0, 0, 0})$ *:*

$$\boldsymbol{E_0ME_0} = [\boldsymbol{1, 0, 0, 0}]\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}\,] \\ [\gamma\vec{\beta}\,] & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\gamma\varepsilon} \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{\eta = \varepsilon}.$$

Si $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$ *on dira que* $\boldsymbol{M}$ *est orthochrone sinon si* $\boldsymbol{\varepsilon = -1}$, ***on*** *dira que* $\boldsymbol{M}$ *est antichrone.*

Comme $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{\varepsilon \cdot det}(\boldsymbol{\Omega})$ *on a* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{M}) = +1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon = +1}$ *et* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = +1$ *ou bien* $\boldsymbol{\varepsilon = -1}$ *et* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = -1$ *et si* $det(\boldsymbol{M}) = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon = -1}$ *et* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = +1$ *ou bien* $\boldsymbol{\varepsilon = +1}$ *et* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = -1$.

Considérons les sous − ensembles de $\mathscr{Lo}$ *suivant :*

$\mathscr{Roo} = \{\boldsymbol{M/\varepsilon = +1}$ ***et*** $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = +1\}$, *les rotations orthochrones,*

$\mathscr{Roo}$ *est un groupe appelé le* **groupe restreint de Lorentz** *puisque pour* **2** *matrices de* $\mathscr{Roo}$ *: M et* $\boldsymbol{M'}$, *on a* :

$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{MM'^{-1}}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{det^{-1}}(\boldsymbol{M'}) = \boldsymbol{\varepsilon \cdot det}(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\varepsilon' \cdot det}(\boldsymbol{\Omega'}) = +1$.

$\mathscr{Roa} = \{\boldsymbol{M/\varepsilon = -1}$ ***et*** $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = +1\}$, *les* ***rotations antichrones***,

$\mathscr{Reo} = \{\boldsymbol{M/\varepsilon = +1}$ ***et*** $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = -1\}$, *les* ***retournements orthochrones***,

$\mathscr{Rea} = \{\boldsymbol{M/\varepsilon = -1}$ ***et*** $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = -1\}$, *les* ***retournements antichrones***.

On remarque que $\mathscr{Roo} \cup \mathscr{Roa} = \{\boldsymbol{M/\,det}(\boldsymbol{\Omega}) = +1\}$ *est un groupe, le* **groupe des rotations**, *que* $\mathscr{Roo} \cup \mathscr{Reo} = \{\boldsymbol{M/\,\varepsilon = +1}\}$, *le* ***groupe orthochrone***, *que* $\mathscr{Roo} \cup \mathscr{Rea} = \{\boldsymbol{M/\varepsilon = +1}$ *et* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = +1$ *ou* $\boldsymbol{\varepsilon = -1}$ *et* $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\Omega}) = -1\}$, *le* **groupe pair**.

On peut aussi considérer l' ensemble des matrices de Lorentz telles que $\boldsymbol{\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}}$, $\boldsymbol{\varepsilon = +1}$ *et* $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta_x}\vec{\boldsymbol{i}}$

$$d'où\ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \gamma\beta_x & \gamma & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \mathbb{T} & & \boldsymbol{Id_{\mathbb{R}^2}} & \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbb{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que cet ensemble un groupe pour la composition : le ***groupe spécial*** *ou* ***boost*** *.*
On remarque en outre que :

$$MM'=\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & 0 & 0 \\ \gamma\beta_x & \gamma & 0 & 0 \\ \mathbb{T} & & Id_{\mathbb{R}2} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma' & \gamma'\beta'_x & 0 & 0 \\ \gamma'\beta'_x & \gamma' & 0 & 0 \\ \mathbb{T} & & Id_{\mathbb{R}2} & \end{bmatrix} = \gamma\gamma'\begin{bmatrix} 1+\beta_x\beta'_x & \beta_x+\beta'_x & 0 & 0 \\ \beta_x+\beta'_x & 1+\beta_x\beta'_x & 0 & 0 \\ \mathbb{T} & & Id_{\mathbb{R}2} & \end{bmatrix}.$$

On remarque que ce groupe est commutatif • Mais si on considère ***2*** *matrices de Lorentz tels que* $\overset{\curlywedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}4}$ *, le produit en général n'est pas tel que* $\overset{\curlywedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}4}$ *• Exemple :*

Si $\vec{\beta} = {}^t(a, b, 0)$, $\vec{\beta_1} = {}^t(a_1, 0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot a & \gamma\cdot b & 0 \\ \gamma\cdot a & 1+\dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot(a)^2 & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot a\cdot b & 0 \\ \gamma\cdot b & \dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot b\cdot a & 1+\dfrac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot(b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1\cdot a_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1\cdot a_1 & 1+\dfrac{\gamma_1^2}{(1+\gamma_1)}\cdot(a_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a\,a_1\gamma\gamma_1+\gamma\gamma_1 & \gamma\gamma_1 a_1+\gamma a\left(1+\dfrac{\gamma_1^2 a_1^2}{1+\gamma_1}\right) & \gamma b & 0 \\ \gamma a\gamma_1+\left(1+\dfrac{\gamma^2 a^2}{1+\gamma}\right)\gamma_1 a_1 & \gamma a\gamma_1 a_1+\left(1+\dfrac{\gamma^2 a^2}{1+\gamma}\right)\left(1+\dfrac{\gamma_1^2 a_1^2}{1+\gamma_1}\right) & \dfrac{\gamma^2 ab}{1+\gamma} & 0 \\ \gamma b\gamma_1+\dfrac{\gamma^2 a\,b\,\gamma_1 a_1}{1+\gamma} & \gamma b\gamma_1 a_1+\dfrac{\gamma^2 ab\left(1+\dfrac{\gamma_1^2 a_1^2}{1+\gamma_1}\right)}{1+\gamma} & 1+\dfrac{\gamma b^2}{1+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= Pr$$

Le produit ***Pr*** *n'est pas symétrique et est donc décomposable en un produit* $Pr = \Lambda(\vec{\beta'})\cdot\overset{\curlywedge}{\Omega}$ *avec* $\overset{\curlywedge}{\Omega} \neq Id_{\mathbb{R}4}$ *,*

$\vec{\beta'}$ *pouvant être calculé par la loi de transformation des vitesses (Voir ci-dessous) et donc* $\overset{\curlywedge}{\Omega} = \Lambda(-\vec{\beta'})\cdot Pr$ *.*

Cela est à rapprocher avec le fait que le produit de ***2*** *matrices symétriques n'est pas, en général, symétrique .*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *et que 2 matrices* ***A*** *et* ***B*** *étant symétriques :*

A et B commutent $\Leftrightarrow AB$ est symétrique ,

car $AB = BA \Rightarrow {}^t(AB) = {}^t(BA) = {}^tA{}^tB = AB \Rightarrow AB$ est symétrique d'une part et d'autre part

$AB = {}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA$.

On remarque que si M est symétrique , par unicité de la décomposition comme $M = M \cdot Id_{\mathbb{R}^4}$

on a $\overset{\wedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$

et que si $\overset{\wedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$ comme $\Lambda(\vec{\beta})$ est symétrique , $M = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \overset{\wedge}{\Omega}$ l'est aussi .

Par ailleurs , si on pose $X' = MX$, $X'' = M'X' = MM'X$ et $M'' = MM'$ on a :

$\gamma'' = \gamma\gamma'(1 + \beta_x\beta'_x)$ et donc $\beta''_x := \dfrac{\beta_x + \beta'_x}{1 + \beta_x\beta'_x}$ qui est une loi de transformation

de vitesse dans un cas particulier . Calculons la loi générale de transformation des vitesses .

Cas où $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$, $\varepsilon = +1$ et $\vec{\beta} = \beta_x \vec{i}$:

De $ct = \gamma\left(ct' + \beta_x x'\right)$ implique que $cdt = \gamma\left(cdt' + \beta_x dx'\right)$ et donc que $\dfrac{dt}{dt'} = \gamma\left(1 + \dfrac{\beta_x}{c}.\dfrac{dx'}{dt'}\right)$,

de $x = \gamma\left(\beta_x ct' + x'\right)$ implique que $dx = \gamma\left(\beta_x cdt' + dx'\right)$ et donc que $\dfrac{dx}{dt'} = \gamma\left(\beta_x c + \dfrac{dx'}{dt'}\right)$,

de $y = y'$ et $z = z'$ il vient $dy = dy'$ et $dz = dz'$

si on note $V_x = \dfrac{dx}{dt}$, ... on a :

$$V_x = \frac{dx}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} = \frac{\gamma\left(\beta_x c + \dfrac{dx'}{dt'}\right)}{\gamma\left(1 + \dfrac{\beta_x}{c}.\dfrac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{V'_x + \beta_x c}{1 + \dfrac{\beta_x}{c}.V'_x} \ , \ V_y = \frac{dy}{dt'}\,\frac{dt'}{dt}$$

$$= \frac{\dfrac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \dfrac{\beta_x}{c}.\dfrac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{V'_y}{1 + \dfrac{\beta_x}{c}.V'_x} \text{ et}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} = \frac{\dfrac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \dfrac{\beta_x}{c}.\dfrac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{V'_z}{1 + \dfrac{\beta_x}{c}.V'_x} \ .$$

Cas où $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$, $\varepsilon = +1$:

De $ct = \gamma\left(ct' + \overrightarrow{\beta.r'}\right)$ implique que $cdt = \gamma\left(cdt' + \overrightarrow{\beta.dr'}\right)$ et donc que $\dfrac{dt}{dt'}$

$= \gamma\left(1 + \dfrac{\vec{\beta}}{c}.\dfrac{\overrightarrow{dr'}}{dt'}\right)$ et $\vec{r} = \vec{r'} + \gamma\vec{\beta}\left(ct' + \dfrac{\gamma}{(1+\gamma)}\left(\vec{\beta}.\vec{r'}\right)\right)$ implique que :

$$\frac{\overrightarrow{dr}}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\,\frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr'}}{dt'} + \gamma\overrightarrow{\beta}c + \frac{\gamma\overrightarrow{\beta}}{(1+\gamma)}\left(\overrightarrow{\beta}.\frac{\overrightarrow{dr'}}{dt'}\right) \text{ d'où :}$$

$$\frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{dr'}}{dt'} + \gamma\overrightarrow{\beta}\left(c + \dfrac{\gamma}{(1+\gamma)}\left(\overrightarrow{\beta}.\dfrac{\overrightarrow{dr'}}{dt'}\right)\right)}{\gamma\left(1 + \dfrac{\overrightarrow{\beta}}{c}\,\dfrac{\overrightarrow{dr'}}{dt'}\right)}\ .$$

Si on pose $\overrightarrow{V}(t) = \dfrac{\overrightarrow{dr}}{dt}$ *et* $\overrightarrow{V'}(t') = \dfrac{\overrightarrow{dr'}}{dt'}$ *on a :*

$$\overrightarrow{V}(t) = \frac{\overrightarrow{V'}(t') + \gamma\left(\overrightarrow{\beta}.\left(\dfrac{\gamma\left(\overrightarrow{\beta}.\left(\overrightarrow{V'}(t')\right)\right)}{1+\gamma} + c\right)\right)}{\gamma\left(1 + \left(\dfrac{\overrightarrow{\beta}}{c}\right).\left(\overrightarrow{V'}(t')\right)\right)}.$$

Dans le cas particulier où $\overrightarrow{\beta} = \beta_x\overrightarrow{i}$ *, en se rappelant que* $\dfrac{\gamma\left(\overrightarrow{\beta}\right)^2}{1+\gamma} = 1-\gamma$*,*
on retrouve les formules trouvées directement plus haut.

Si on pose $\overrightarrow{A}(t) = \dfrac{\overrightarrow{dV}(t)}{dt}$ *et* $\overrightarrow{A'}(t) = \dfrac{\overrightarrow{dV'(t')}}{dt'}$ *on a , en dérivant en se rappelant que*
$\dfrac{dt}{dt'} = \gamma\left(1 + \dfrac{\overrightarrow{\beta}}{c}.\dfrac{\overrightarrow{dr'}}{dt'}\right)$ *dans le cas particulier où* $\overrightarrow{\beta} = \beta_x\overrightarrow{i}$,

$$\frac{\overrightarrow{dV}}{dt} = \frac{\dfrac{d}{dt'}\overrightarrow{V'}(t') + \dfrac{\gamma^2\cdot\overrightarrow{\beta}\left(\overrightarrow{\beta}\left(\dfrac{d}{dt'}\overrightarrow{V'}(t')\right)\right)}{1+\gamma}}{\gamma^2\left(1 + \dfrac{\overrightarrow{\beta}.\overrightarrow{V'}}{c}(t')\right)^2} - \frac{\left(\overrightarrow{V'}(t') + \gamma\cdot\overrightarrow{\beta}\left(\dfrac{\gamma\left(\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{V'}(t')\right)}{1+\gamma} + c\right)\right)\left(\left(\dfrac{\overrightarrow{\beta}}{c}\right).\left(\dfrac{d}{dt'}\overrightarrow{V'}(t)\right)\right)}{\gamma^2\left(1 + \dfrac{\overrightarrow{\beta}.\overrightarrow{V'}}{c}(t')\right)^3}$$

$$\overrightarrow{A}(t) = \frac{\overrightarrow{A'}(t') + \dfrac{\gamma^2\overrightarrow{\beta}\left(\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{A'}(t')\right)}{1+\gamma}}{\gamma^2\left(1 + \dfrac{\overrightarrow{\beta}.\overrightarrow{V'}}{c}(t')\right)^2} - \frac{\dfrac{\left(\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{A'}(t)\right)}{c}.\left(\overrightarrow{V'}(t') + \gamma.\overrightarrow{\beta}\left(\dfrac{\gamma\left(\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{V'}(t')\right)}{1+\gamma} + c\right)\right)}{\gamma^2\left(1 + \dfrac{\overrightarrow{\beta}.\overrightarrow{V'}}{c}(t')\right)^3}\ .$$

Dans le cas particulier où $\overrightarrow{\beta} = \beta_x\overrightarrow{i}$ *, en se rappelant toujours que* $\dfrac{\gamma\left(\overrightarrow{\beta}\right)^2}{1+\gamma} = 1-\gamma$*,*
on peut calculer A_x, A_y, A_z *plus simplement :*

$$A_x = \frac{\left(A'_x + \frac{\gamma^2 \beta^2_x A_x'}{1+\gamma}\right)\left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right) - \left(\frac{\beta_x A_x' V_x'}{c} + \frac{\gamma^2 \beta^3_x A_x' V_x'}{c(1+\gamma)} + \gamma\beta^2_x A_x'\right)}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3}$$

$$= \frac{\gamma A'_x + \frac{\gamma A_x \beta_x V_x'}{c} - \frac{\beta_x A_x' V_x'}{c} - \frac{\gamma^2 \beta^3_x A_x' V_x'}{c(1+\gamma)} - \gamma\beta^2_x A_x'}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3}$$

$$= \frac{\gamma A_x + \frac{A_x \beta_x V_x'}{c}(\gamma - 1 + (1-\gamma)) - \gamma\beta^2_x A_x'}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3} = \frac{A_x' \gamma (1 - \beta_x^2)}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3} = \frac{A_x'}{\gamma^3 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3}$$

$$A_y = \frac{A'_y \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right) - \frac{\beta_x A_x' V_y'}{c}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3} = \frac{A'_y + \frac{\beta_x A'_y V_x'}{c} - \frac{\beta_x A_x' V_y'}{c}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3} = \frac{A'_y + \frac{\beta_x}{c}\left(A'_y V_x' - A_x' V_y'\right)}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3},$$

de même pour A_z .

En résumé : $A_x = \dfrac{A_x'}{\gamma^3 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3}$, $A_y = \dfrac{A'_y + \frac{\beta_x}{c}\left(A'_y V_x' - A_x' V_y'\right)}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3}$, $A_z = \dfrac{A'_z + \frac{\beta_x}{c}\left(A'_z V_x' - A_x' V_z'\right)}{\gamma^2 \left(1 + \frac{\beta_x V_x'}{c}\right)^3}$.

Formules obtenues directement dans J • Ph • Pérez ." Relativité et invariance "*Dunod 2011 p 74.*

Pour d'autre formules voir : E.Gourgoulhon ."Relativité restreinte" *• EDP Sciences 2010 •*

A titre d'exercice :

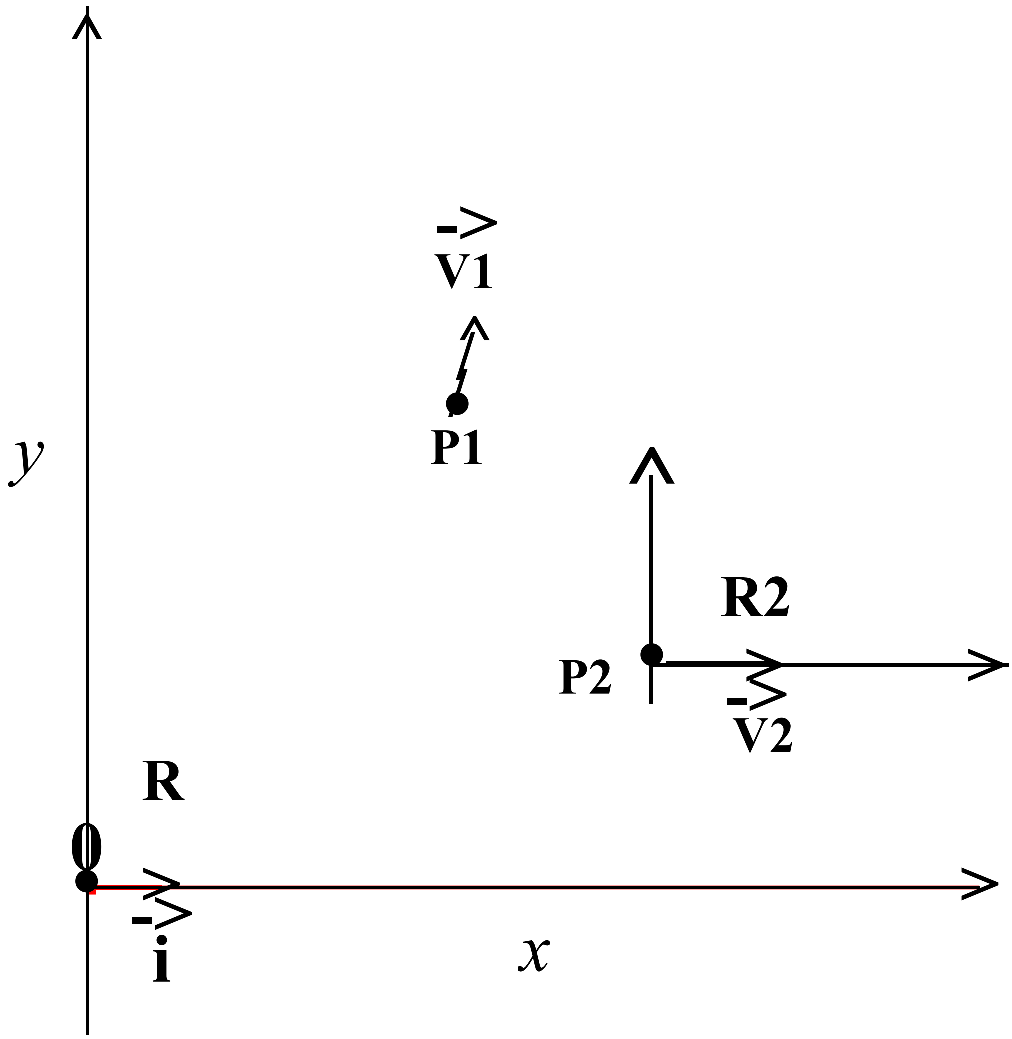
Evaluation du module de la vitesse relative :

(*Annequin et Boutigny* ."Mécanique relativiste ,Exercices " *• Vuibert 1978. p 25*)

Soit 2 points ***P1*** *et* ***P2*** *animés respectivement des vitesses* $\overrightarrow{V1}$ *et* $\overrightarrow{V2}$ *dans un repère* ***R*** .

On considère un repère ***R2*** *associé à* ***P2*** *, choisissons l'axe des x de* ***R*** *parallèle à* $\overrightarrow{V2}$.

c *étant la vitesse de la lumière .*



R *est animé d'une vitesse* $-\overrightarrow{V2}$ *par rapport à* ***R2*** *.*

Calculons le module de la vitesse de ***P1*** *par rapport à* ***R2*** *:* ***V1'*** *. Posons* $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(\overrightarrow{V1})^2}{c^2}}}$ *et*

$$\alpha = 1 - \frac{(\overrightarrow{V2})_x \cdot (\overrightarrow{V1})_x}{c^2} = 1 - \frac{\overrightarrow{V2}.\overrightarrow{V1}}{c^2}$$

, les formules de transformation donnent :

$$(\overrightarrow{V1'})_x = \frac{(\overrightarrow{V1})_x - (\overrightarrow{V2})_x}{\alpha},\ (\overrightarrow{V1'})_y = \frac{(\overrightarrow{V1})_y}{\alpha.\gamma},\ (\overrightarrow{V1'})_z = \frac{(\overrightarrow{V1})_z}{\alpha.\gamma}.$$

D'où : $(\overrightarrow{V1'})^2 = (\overrightarrow{V1'})^2_x + (\overrightarrow{V1'})^2_y + (\overrightarrow{V1'})^2_z$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\left((\overrightarrow{V1})_x - (\overrightarrow{V2})_x\right)^2 + \frac{(\overrightarrow{V1})_y^2}{\gamma^2} + \frac{(\overrightarrow{V1})_z^2}{\gamma^2}\right].$$

En développant le second membre :

$$\left(\overrightarrow{V1}\right)_x^2 + \left(\overrightarrow{V2}\right)_x^2 - 2\left(\overrightarrow{V1}\right)_x\left(\overrightarrow{V2}\right)_x + \left(\overrightarrow{V1}\right)_y^2\left(1 - \frac{\left(\overrightarrow{V1}\right)^2}{c^2}\right) + \left(\overrightarrow{V1}\right)_z^2\left(1 - \frac{\left(\overrightarrow{V1}\right)^2}{c^2}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{V1}\right)_x^2 + \left(\overrightarrow{V1}\right)_y^2 + \left(\overrightarrow{V1}\right)_z^2 - 2\left(\overrightarrow{V1}\right)_x\left(\overrightarrow{V2}\right)_x - \frac{1}{c^2}\left(\left(\overrightarrow{V1}\right)_x^2\left(\overrightarrow{V1}\right)_y^2 + \left(\overrightarrow{V1}\right)_x^2\left(\overrightarrow{V1}\right)_z^2\right),$$

or $\left(\left(\overrightarrow{V1}\right) - \left(\overrightarrow{V2}\right)\right)^2 = \left(\overrightarrow{V1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{V2}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{V1}\right)\left(\overrightarrow{V2}\right)$ *et* $\overrightarrow{V2}.\overrightarrow{V1} = \left(\overrightarrow{V2}\right)_x \cdot \left(\overrightarrow{V1}\right)_x$,

de plus : $\overrightarrow{V1} \wedge \overrightarrow{V2} = -\vec{j}\left(-\left(\overrightarrow{V1}\right)z\left(\overrightarrow{V2}\right)_x\right) + \vec{k}\left(\left(\overrightarrow{V1}\right)y\left(\overrightarrow{V2}\right)_x\right)$ *d'où :*

$\left(\overrightarrow{V1} \wedge \overrightarrow{V2}\right)^2 = \left(\overrightarrow{V1}\right)_x^2\left(\overrightarrow{V1}\right)_y^2 + \left(\overrightarrow{V1}\right)_x^2\left(\overrightarrow{V1}\right)_z^2$. *On conclut par :*

$$\left(\overrightarrow{V1'}\right)^2 = \frac{\left(\left(\overrightarrow{V1}\right) - \left(\overrightarrow{V2}\right)\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\overrightarrow{V1} \wedge \overrightarrow{V2}\right)^2}{\left(1 - \frac{\overrightarrow{V2}.\overrightarrow{V1}}{c^2}\right)}.$$

Cette dernière formule est symétrique en $\overrightarrow{V2}$ *et* $\overrightarrow{V1}$.

Chaptre VIII :
Trajectoires non − rectilignes.

*Dans le cas d'une particule **P** munie d'un mouvement non − rectiligne, de vitesse* $\vec{V}(t)$,
t *étant le temps du repère de référence, on veut estimer le temps propre* τ *de **P** en fonction de* t.

On donne une justification de la formule : $\tau(t_2) - \tau(t_1) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \tilde{\gamma}\left(\frac{\vec{V}^2(t)}{c^2}\right) dt$

avec $\tilde{\gamma}(u) = \sqrt{1-u}$ *, de la même manière que l'on évalue la longueur d'une courbe.*

Lemme 1 :

Theorème de la moyenne : (*J.Dieudonné.*"Eléments d'analyse" *: T.1 p.160 .Gauthier - villars 1969 .*)

Soit $I = [\alpha, \beta]$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, *ensemble des nombres réels et* $\mathbb{F}$ *un espace de Banach. Soit* $\mathbb{D} \subseteq I$, $\mathbb{D}$ *dénombrable.*

Soit $f : I \to \mathbb{F}$ *et* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *2 applications continues telles que* f *et* φ *soient dérivables sur* $I \setminus D$ *et que* $\forall \xi \in I \setminus D : \| f'(\xi) \| \leq \varphi'(\xi)$.

Conclusion :

$$\| f(\beta) - f(\alpha) \| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) .$$

Démonstration :

Soit $\rho : \mathbb{N} \to D$ *une application bijective de* $\mathbb{N}$, *ensemble des entiers naturels dans* D *et* $\varepsilon > 0$.

Soit $A \subseteq I$ *défini par :*

$$A = \left\{ \xi \in I / \ \forall \zeta \text{ tel que } \alpha \leq \zeta < \xi \text{ on ait : } \| f(\zeta) - f(\alpha) \| \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + (\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \zeta} 2^{-n} \right\}$$

On a évidemment $\alpha \in A$ *de plus si* η *est tel que* $\alpha < \eta < \xi$ *alors* $\eta \in A$ *par définition de* A.

Donc A *est de la forme si* $\gamma = sup(A)$: $A = [\alpha, \gamma[$ *ou* $A = [\alpha, \gamma]$.

Comme f *et* φ *sont continues :*

$$(1) \qquad \| f(\gamma) - f(\alpha) \| \leq \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \gamma} 2^{-n} .$$

Montrons que $\gamma = \beta$:

Si $\gamma < \beta$:

et si $\gamma \notin D$:

Par définition de la dérivée :

Pour $\varepsilon > 0 \ \exists \lambda > 0$ *tel que pour* $\forall \zeta$ *tel que* $\gamma \leq \zeta < \gamma + \lambda$:

$$\| f(\varsigma) - f(\gamma) - f'(\gamma)(\zeta - \gamma) \| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma) \text{ et}$$

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\gamma)-\varphi'(\gamma)(\zeta-\gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma).$$

En appliquant les inégalités :

$|\,\|a\| - \|b\|\,| \leq \|a-b\|$ *et* $\|f'(\gamma)(\zeta-\gamma)\| \leq \|f'(\gamma)\|(\zeta-\gamma)$ *:*

$$\|f(\zeta)-f(\gamma)\| - \|f'(\gamma)(\zeta-\gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma) \text{ et}$$

$$\varphi'(\gamma)(\zeta-\gamma) - (\varphi(\zeta)-\varphi(\gamma)) \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma) \text{ car } \varphi' \geqslant 0 \text{ et donc } \varphi \text{ croissante :}$$

$$\|f(\zeta)-f(\gamma)\| - \|f'(\gamma)(\zeta-\gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma) \text{ d'où :}$$

$$\|f(\zeta)-f(\gamma)\| \leq \|f'(\gamma)\|(\zeta-\gamma) + \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma)$$

$$\leq \varphi'(\gamma)(\zeta-\gamma) + \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma)$$

$$\leq \varphi(\zeta)-\varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta-\gamma).$$

De (1) *et de ce qui précède :*

$$\|f(\zeta)-f(\alpha)\| \leq \|f(\zeta)-f(\gamma)\| + \|f(\gamma)-f(\alpha)\|$$

$$\leq \varphi(\zeta)-\varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta-\gamma) + \varphi(\gamma)-\varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma-\alpha) + \varepsilon\sum_{\rho(n)<\gamma} 2^{-n}$$

$$\leq \varphi(\zeta)-\varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta-\alpha) + \varepsilon\sum_{\rho(n)<\zeta} 2^{-n}$$

donc $\zeta \in A$ $\forall\, \zeta$ *tel que* $\gamma \leq \zeta < \gamma+\lambda$ *: ce qui est contraire à la définition de* γ*.*

maintenant si $\gamma \in D$ *:*

$\exists\, m \in \mathbb{N}$ *tel que* $\gamma = \rho(m)$ *, d'autre part* φ *et* f *étant continus* $\exists\, \lambda > 0$ *tel que :*
$[\gamma, \gamma+\lambda] \subseteq I$ *et pour* ζ *tel que* $\gamma < \zeta < \gamma+\lambda$ *on ait pour* $\varepsilon > 0$ *et* $m \in \mathbb{N}$*:*

$$\|f(\zeta)-f(\gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} \text{ et } \varphi(\zeta)-\varphi(\gamma) \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}. \quad (2)$$

Donc **:**

$$\|f(\zeta)-f(\alpha)\| \leq \|f(\zeta)-f(\gamma)\| + \|f(\gamma)-f(\alpha)\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + \varphi(\gamma)-\varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma-\alpha) + \varepsilon\sum_{\rho(n)<\gamma} 2^{-n} \quad (\text{par } (1))$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + \varphi(\zeta)-\varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta-\alpha) + \varepsilon\sum_{\rho(n)<\gamma} 2^{-n} \quad (\varphi \nearrow \text{et } \gamma < \zeta)$$

$$\leq \varepsilon 2^{-m} + \varepsilon(\zeta-\alpha) + \varepsilon\sum_{\rho(n)<\gamma} 2^{-n}$$

or $\gamma = \rho(m)$ *:* $\varepsilon 2^{-m} + \varepsilon\sum_{\rho(n)<\gamma} 2^{-n} \leq \varepsilon\sum_{\rho(n)<\zeta} 2^{-n}$ *donc*

$$\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + (\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \zeta} 2^{-n}$$ *: nouvelle contradiction .*

Conclusion : $\gamma = \beta$ (*1*) *et* $\varepsilon > 0$ *étant arbitraire le théorème est démontré .*

Conséquence *: Si on prend* $\varphi(\xi) = M(\xi - \alpha)$ *avec* $M > 0$ *on a le résultat suivant :*
Soit $I = [\alpha, \beta]$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *ensemble des nombres réels*
et $\mathbb{F}$ *un espace de Banach . Soit* $\mathbb{D} \subseteq I$ *,* $\mathbb{D}$ *dénombrable .*
Soit $f : I \to \mathbb{F}$*, applications continue, telle que* f *est dérivable sur* $I \setminus D$
et que $\exists M > 0, \ \forall \xi \in I \setminus D : \|f'(\xi)\| \leq M$ *alors :*

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha) \ .$$

Lemme 2 *:* (*J.Dieudonné.*"Eléments d'analyse" *: T.1 p.164 .Gauthier − villars 1969 .*)
Convergence uniforme des dérivées .
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, ensemble des nombres réels*
et $\mathbb{F}$ *un espace de Banach . Soit* $\mathbb{D} \subseteq I$ *,* $\mathbb{D}$ *dénombrable .*
Soit la suite de fonctions (g_n)

telle que $g_n : I \to \mathbb{F}$ *,* $n \in \mathbb{N}$*,* $\mathbb{N}$ *ensemble des entiers naturels .*
Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*
g_n *est la dérivée sur* $I \setminus \mathbb{D}_n$ *,* $\mathbb{D}_n \subseteq I$ *,* $\mathbb{D}_n$ *dénombrable,*
d'une fonction f_n *continue .On pose* $\mathbb{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}_n$ *qui est aussi dénombrable .*
On suppose en outre :
(*1*) $\exists \xi_0 \in I$ *tel que* $f_n(\xi_0) \xrightarrow{n} \ell \in F$ *.*
(*2*) $\forall \zeta \in I \ \ \exists \mathcal{V}(\zeta)$ *voisinage de* ζ *dans* I *tel que dans* $\mathcal{V}(\zeta)$
la suite (g_n) *converge uniformément .*
Alors $\forall \zeta \in I$ *la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $\mathcal{V}(\zeta)$ *.*
Et si l'on pose $f(\xi) = \lim_{n \to +\infty} f_n(\xi)$ *et* $g(\xi) = \lim_{n \to +\infty} g_n(\xi)$
alors sur $I \setminus \mathbb{D}$ *on a* $f'(\xi) = g(\xi)$ *.*

Démonstration :
Considérons $\forall \zeta \in I$ *la boule* $\mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \subseteq \mathcal{V}(\zeta)$ *alors*
d'après le théorème de la moyenne :

$$\forall x \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \quad \|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(\zeta) - f_m(\zeta))\|$$

$$\leq |x - \zeta| \cdot \sup_{\xi \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \setminus \mathbb{D}} (\|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)\|)$$

$$\leq \rho_\zeta \cdot \sup_{\xi \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \setminus \mathbb{D}} (\|g_n(\xi) - g_m(\xi)\|) . \quad (3)$$

Par (*2*) *et* (*3*) *la suite* $(f_n(x) - f_n(\zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ *est de Cauchy .*
Cela montre que dès que , quand en un point $\xi_0 \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta)$
la suite (f_n) *est convergente elle est convergente partout et*

même uniformément sur $\mathscr{B}\left(\zeta,\rho_\zeta\right)$. $\quad (4)$

Soit $\mathcal{U}=\left\{x \in I \,/\, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe}\right\}$.

Soit $u \in \mathcal{U}$ *:* $\mathscr{B}\left(u,\rho_u\right) \subseteq \mathcal{U}$ *par* (4) *:* $\mathcal{U}$ *est ouvert dans* I.

Si la suite (u_n) , $u_n \in \mathcal{U}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n=\overline{u}$

alors il existe un rang à partir duquel $u_n \in \mathscr{B}\left(\overline{u}\,,\rho_{\overline{u}}\right)$

donc $\overline{u} \in \mathcal{U}$ *:* $\mathcal{U}$ *est fermé dans* I.

I *étant connexe* $\mathcal{U}=I$*.La première partie du théorème est ainsi démontrée .*

Soit donc $f(\xi)=\lim_{n\to+\infty} f_n(\xi)$ *sur I,*

montrons que $g=f'$ *sur* $I \setminus \mathbb{D}$. *Soit* $\zeta \in I \setminus \mathbb{D}$ *et*

soit $\varepsilon>0 : \exists\, n_0, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$ *tel que :*

$\left\|f'_n(z)-f'_m(z)\right\| \leq \varepsilon \quad \forall z \in \mathscr{B}\left(\zeta,\rho_\zeta\right)$

et $\left\|g(\zeta)-f_n'(\zeta)\right\| \leq \varepsilon$ *par* (2) . $\quad (5)$

Faisons tendre m vers l'infini dans (3) *:*

$\forall x \in \mathscr{B}\left(\zeta,\rho_\zeta\right) \quad \left\|f_n(x)-f(x)-\left(f_n(\zeta)-f(\zeta)\right)\right\|$

$\leq |x-\zeta| \cdot \sup_{\xi \in \mathscr{B}\left(\zeta,\rho_\zeta\right)\setminus \mathbb{D}} \left(\left\|f'_n(\xi)-f'(\xi)\right\|\right)$

$\leq \varepsilon \cdot |x-\zeta| \qquad$ *par* (5)

D'autre part f_n *étant différentiable sur* $I \setminus \mathbb{D}$, *soit* $\zeta \in I \setminus \mathbb{D}$*:*

$\exists\, r<\rho_\zeta$ *tel que si* $|x-\zeta|<r$ *on ait*

$\left\|f_n(x)-f_n(\zeta)-f'_n(\zeta)\right)(x-\zeta)\| \leq \varepsilon \cdot |x-\zeta|$. $\quad (6)$

D'autre part :

$\left\|f(x)-f(\zeta)-g(\zeta)(x-\zeta)\right\|$

$=\left\|f(x)-f(\zeta)-\left(f_n(x)-f_n(\zeta)\right)+\left(f_n(x)-f_n(\zeta)\right)-f'_n(\zeta)(x-\zeta)\right.$

$\left.+f'_n(\zeta)(x-\zeta)-g(\zeta)(x-\zeta)\right\|$

$\leq \left\|f(x)-f(\zeta)-\left(f_n(x)-f_n(\zeta)\right)\right\|$

$+\left\|\left(f_n(x)-f_n(\zeta)\right)-f'_n(\zeta)(x-\zeta)\right\|$

$+\left\|\left(f'_n(\zeta)-g(\zeta)\right)(x-\zeta)\right\|$

$\leq 3\,\varepsilon \cdot |x-\zeta|$ *par* (3), (4) , (5) *et* (6) .

L'unicité de la dérivée montre que la deuxième partie du théorème est démontrée .

<u>Lemme 3 :</u>

Toute fonction g continue sur l'intervalle compact $[a \quad b]$ *à valeur dans un espace vectoriel normé E est limite uniforme d'une suite de fonction* (g_n) *en escalier de la forme :*

$$g_n(t)=g\left(\theta_i^n\right) \; \forall t \in \left[\theta_i^n \quad \theta_{i+1}^n\right[\text{ pour } i=1, n-1 \,,\, \theta_1^n=a \quad , g_n(b)=g(b)$$

$$\text{où } \bigcup_{i=1,\,n-1}\left(\left[\theta_i^n \quad \theta_{i+1}^n\right[\right) \bigcup \{b\} \text{ est une partition de } [a \quad b]$$

telle que $\left| \theta_i^n - \theta_{i+1}^n \right| < \dfrac{1}{n}$ *pour* $i = 1, n-1$.

Démonstration :

g continue sur un compact $[a \quad b]$ *est aussi uniformément continue donc :*

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \delta_n > 0$ *tel que* $\forall x, \forall y \in [a \quad b]$ *tel que* $| x - y | < \min\left(\delta_n , \dfrac{1}{n}\right)$

alors $\| g(x) - g(y) \| < \dfrac{1}{n}$.

Soit $\bigcup_{i=1, n-1} \left(\left[\theta_i^n \quad \theta_{i+1}^n \right[\right) \bigcup \left\{ b \right\}$ *une partition de* $[a \quad b]$

telle que : $\left| \theta_i^n - \theta_{i+1}^n \right| < \min\left(\delta_n , \dfrac{1}{n}\right)$ *et soit* g_n *définie par :*

$g_n(t) = g\left(\theta_i^n\right) \; \forall t \in \left[\theta_i^n \quad \theta_{i+1}{}^n \right[$ *pour* $i = 1, n-1$, $\theta^n_1 = a$, $g_n(b) = g(b)$.

On a alors : $\| g_n(t) - g(t) \| < \dfrac{1}{n} \quad \forall t \in \left[\theta_i^n \quad \theta_{i+1}{}^n \right[$

puisque $g_n\left(t\right) = g\left(\theta_i^n\right)$ *et comme* $g_n(b) = g(b)$ *le résultat est démontré .*

Remarque : *Ce résultat est un cas particulier du théorème qui caractérise les fonctions réglées sur un compact comme limite uniforme de fonctions en escalier .*
(J.Dieudonné."Eléments d'analyse :T.1 p.146 .Gauthier-villars 1969 .).

<u>Lemme 4</u> *: Construction d'une primitive continue d'une fonction en escalier .*
Soit la fonction f *continue sur l'intervalle compact* $[a \quad b]$
à valeur dans un espace vectoriel normé E *,*
et soit la fonction g *en escalier sur l'intervalle compact* $[a \quad b]$
à valeur dans un espace vectoriel normé E
définie par :

$g(t) = f\left(\theta_i\right) \; \forall t \in \left(\left[\theta_i \quad \theta_{i+1} \right[\right)$ *pour* $i = 1, \ldots, n-1 \; ; \theta_1 = a$, $g(b) = f(b)$,

où $\bigcup_{i=1, n-1} \left(\left[\theta_i \quad \theta_{i+1} \right[\right) \bigcup \left\{ b \right\}$, $\left(\theta_i < \theta_{i+1} \right)$, *est une partition de* $[a \quad b]$.

Sur $\left(\left[\theta_1 \quad \theta_2 \right[\right)$ *définissons* G *par :* $G(t) = f\left(\theta_1\right)\left(t - \theta_1\right)$ *, d'où* $G'(t) = f\left(\theta_1\right)$ *,*

sur $\left(\left[\theta_i \quad \theta_{i+1} \right[\right)$ *our* $i > 1$ *:*

$G(t) = f\left(\theta_i\right)\left(t - \theta_i\right) + \sum_{k=1}^{i-1} f\left(\theta_k\right)\left(\theta_{k+1} - \theta_k\right)$ *d'où* $G'(t) = f\left(\theta_i\right)$,

$G(b) = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\theta_k\right)\left(\theta_{k+1} - \theta_k\right)$.

Montrons que G *est continue : pour* $i = 1, \ldots, (n-1)$ *:*

$$\lim_{t \to \theta_{i+1}} G(t) = f(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) + \sum_{k=1}^{i-1} f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k)$$

$= \sum_{k=1}^{i} f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k)$, or $G(\theta_{i+1}) = \sum_{k=1}^{i} f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k)$ (*cf* **D1 p168**) .

De plus comme **G** *est dérivable sur* $[a \;\; b]$ *sauf en un nombre fini de points et que* $\| G'(t) \| = \| g(t) \| \leq \| f \|_\infty$ *aux points de dérivabilités*

le lemme de la moyenne montre que :

$$\forall t, t' \in [a \;\; b] : \| G(t) - G(t') \| \leq \| f \|_\infty |t - t'| .$$

Lemme 5 :

Toute fonction f *définie sur l'intervalle compact* $[a \;\; b]$ *à valeur dans un espace vectoriel normé* **E** *vérifiant la condition de Lipschitz :*

$\exists K > 0 \;\; \forall t, t' \in [a \;\; b]$ *alors* $\| f(t) - f(t') \| \leq K |t - t'|$ *vérifie :*

$$(1) \;\; \sup\left(\sum_{j=1}^{N} \| f(x_j) - f(x_{j-1}) \| \,/\, \forall N \in \mathbb{N}, \forall (x_j)_{i=1, N}, a \leq x_0 \leq \ldots\ldots \leq x_N \leq b \right) \text{ est fini .}$$

On dit alors que f *est à variation bornée .*

(2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ *tels que :*

$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall (a_j)_{i=1, N} \; \forall (b_j)_{i=1, N} \quad a_j < b_j$,

$([a_j, b_j])$ *étant une sous − partition de* $[a \;\; b]$,

$$\text{ont ait : } \sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \| (f(b_j) - f(a_j)) \| < \varepsilon.$$

On dit que f *est absolument continue .*

Démonstration :

$$\text{Dans le premier cas} \quad \sum_{j=1}^{N} \| f(x_j) - f(x_{j-1}) \| \leq K(b - a) .$$

Dans le second cas Prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$.

Remarque : *On démontre que sur un intervalle compact la continuité absolue implique la variation bornée* (*cf R • G • Bartle : A modern Theory of Integration • AMS 2001 p231*) .

Lemme 6 : *Théorème de* ***Lebesgue*** .

Si f *est absolument continue sur un compact (et donc à variation bornée) , si* f *différentiable Lebesgue - presqe − partout , et si* $f' \in \mathcal{L}^1([a \;\; b])$ *alors :*

$$f(x) = \int_a^x f'(u) \, du .$$

Pour la démonstration voir (W • Rudin • Analyse réelle et complexe • Masson.1978 • p159).

Lemme 7 :

Soit $I=[t_1 \;\; t_2]$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, f *une application de* I *dans* E *espace de Banach telle que* f *soit de classe* $\mathcal{C}^1$ (*dérivée continue*) .
Soit $\varepsilon > 0$ *alors il existe une fonction* $\mathcal{G}_\varepsilon$ *de* I *dans* E *telle que* $\mathcal{G}_\varepsilon$ *soit dérivable ,*
$\mathcal{G}_\varepsilon'$ *soit linéaire par morceaux sur* I

et telles que $\left\| \mathcal{G}_\varepsilon - f \right\|_\infty < \varepsilon$ *et* $\left\| \mathcal{G}_\varepsilon' - f' \right\|_\infty < \varepsilon$ $\left(\|h\|_\infty = \sup_{x \in I} \|h(x)\| \right)$.

Démonstration :
D'aprés le ***lemme 1*** f' *étant continue sur* I *limite uniforme d'une suite de fontions en escalier* (g_n).
D'aprés le ***lemme 2*** *pour tout* n g_n *admet une primitive continue linéaire par morceaux* G_n *telle que* $\forall n \;\; G_n(t_1) = f(t_1)$ *et* $G'_n = g_n$ *sauf sur ensemble fini* D_n *de points de I .*
En résumé on a :

(1) $(g_n) \to f'$ *uniformément .*

(2) $\forall n \; \exists G_n$ *continue telle que* $G'_n = g_n$ *sauf en un nombre fini de points* D_n .

(3) $\forall n \;\; G_n(t_1) = f(t_1)$ *et donc* $\lim_{n \to +\infty} G_n(t_1) = f(t_1)$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence de suite de dérivées et conclure par :

(4) $\exists G$ *application de* I *dans* E *telle que* $(G_n) \to G$ *uniformément*
et donc G *continue .*

(5) $G' = f'$ *sauf sur un ensemble dénombrable de points* $\bigcup_n D_n$.

Comme $\forall t, t' \in [t_1 \;\; t_2], \forall n ,\;\; \|G_n(t) - G_n(t')\| \le \|f\|_\infty \|t - t'\|$ *on a :*

$$\forall t, t' \in [t_1 \;\; t_2] \qquad \|G(t) - G(t')\| \le \|f\|_\infty \|t - t'\| \quad .$$

Donc G *est à variation bornée et absolument continue sur* $[t_1 \;\; t_2]$.
La continuité de f' *implique que* f' *est intégrable sur* $[t_1 \;\; t_2]$,
donc (5) *implique que* G' *l'est aussi .*
(5) *implique aussi que* G *est aussi dérivable Lebesgue - presque − partout .*
On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue (***lemme 4***) :

Donc $G(t) - G(t_1) = \displaystyle\int_{t_1}^{t} G'(u)\,du = \int_{t_1}^{t} f'(u)\,du$ *et comme* $G(t_1) = f(t_1)$

on a $G = f$ *sur* I .

<u>Lemme 8 :</u>

Soit $\varphi : ([0 \quad 1[) \to (]0 \quad 1]) : u \to \sqrt{1 - u}$.
Soit (f_n) *une suite de fontions positives continues , définie sur* $\mathbb{R}$, *telles que*
$\forall n \;\; \|f_n\|_\infty < 1$ *et telles que* (f_n) *converge uniformément vers* f ,
et telle que $\|f\|_\infty < 1$ *alors :*

$$\int_{t_1}^{t} \varphi\big(f_n(u)\big)\, du \to \int_{t_1}^{t} \varphi\big(f_n(u)\big)\, du \quad \forall t, t_1 .$$

Démonstration :

Comme $\|f\|_\infty < 1 \;\; \exists\, \varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon < 1 - \|f\|_\infty$ *et* $\exists N_\varepsilon$ *tel que* $\forall n \geq N_\varepsilon$:

$\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \varepsilon < 1$ *car* $\big|\, \|f_n\|_\infty - \|f\|_\infty \big| \leq \|f_n - f\|_\infty$.

Comme $\varphi'(u) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-u}}$ *sur* $([0 \quad 1[)$ *on a :*

$C = \sup\big(\, |\varphi'(u)| \,/\, u \in [0\,,\ \|f\|_\infty + \varepsilon]\big) < +\infty$, *on a alors :*

$$\big|\varphi\big(f_n(t)\big) - \varphi(f(t))\big| \leq C\|f_n - f\|_\infty \quad \forall t$$

donc $\varphi\big(f_n\big)$ *converge uniformément vers* $\varphi(f))$ *et donc :*

$$\int_{t_1}^{t} \varphi\big(f_n(u)\big)\, du \to \int_{t_1}^{t} \varphi\big(f(u)\big)\, du \quad \forall t, \forall t_1 .$$

<u>Calcul d'un temps propre :</u>

Soit une particule **P** *se déplaçant à une vitesse uniforme* $\overrightarrow{V}$ *dans un repère* $\mathcal{R}(O, t, x, y, z)$,
On munit **P** *d'un repère* $\mathcal{R}'(P, \tau, x', y', z')$ *, les directions* $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ *restant parallèles respectivement à* $\overrightarrow{Px'}, \overrightarrow{Py'}, \overrightarrow{Pz'}$ *. Considerons 2 positions de la particule :* $P(t_1)$ *et* $P(t_2)$.
Comme $\overrightarrow{V}$ *est uniforme , on peut écrire que , si* **c** *est la vitesse de la lumière :*

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - \overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}^{\,2} = c^2(\tau_2 - \tau_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2\left(1 - \frac{\overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}^{\,2}}{c^2(t_2 - t_1)^2}\right),$$

d'où $\qquad \tau_2 - \tau_1 = (t_2 - t_1)\ \widetilde{\gamma}\left(\dfrac{\overrightarrow{V}^2}{c^2}\right) \qquad$ *où* $\quad \widetilde{\gamma}\,(u) = \sqrt{1-u}$.

Si maintenant la particule se déplace d'une façon continue prenant successivement les vitesses uniformes $\overrightarrow{V_1}, \ldots, \overrightarrow{V_n}$ *pendant respectivement les durées* $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_n$
la durée propre du déplacement vérifiera :

$$\Delta\tau = \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\ \widetilde{\gamma}\left(\frac{\overrightarrow{V_i}^2}{c^2}\right).$$

Considérons maintenant le cas où $P(t)$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *(dérivée continue) , on a le résultat suivant :*

<u>Théorème :</u>

Pour tout $\varepsilon > 0$ *, pour tout intervalle* $[t_1, t_2]$ *de temps , il existe une particule* Q_ε

de position $\overrightarrow{OQ_\varepsilon}(t)$ *et de vitesse* $\overrightarrow{V_\varepsilon}(t)$ *constante par morceaux telle qu' on ait :*

$$\sup_{t \in [t_1, t_2]} \left\| \overrightarrow{OP}(t) - \overrightarrow{OQ}(t) \right\| \leq \varepsilon \quad et \quad \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left\| \overrightarrow{V}(t) - \overrightarrow{V_\varepsilon}(t) \right\| \leq \varepsilon \ (1).$$

Le temps propre τ_ε *de la particule* Q_ε *vérifie :* $\left\| \tau_\varepsilon(t_2) - \tau_\varepsilon(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\gamma}\left(\frac{\overrightarrow{V}^2}{c^2} \right) dt \right\| \leq \varepsilon,$

avec $\tilde{\gamma}(u) = \sqrt{1 - u}$, c *étant la vitessse de la lumière* (2).

Démonstration :

Appliquons le lemme 7 à la fonction $\overrightarrow{OP(t)}$ *•Il exite alors une fonction* $\overrightarrow{OQ_\varepsilon}$ *de vitesse* $\overrightarrow{V_\varepsilon}(t)$,
telle que (1) *soit vérifié.*
Le lemme **8** *implique* (2) .

Bibliographie :

Annequin et Boutigny ."Mécanique relativiste ,Exercices ". *Vuibert 1978.*
R.G. Bartle ." Modern theory of integration ". *AMS 2001.*
Berkeley (*Cours de Physique vol 1*) ."Mécanique". *Armand Colin 1972.*
P • Boyer ."Algèbre et Géométries " . *C&M 2015* .
P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968 .
J. Dieudonné."Eléments d'analyse " . *Gauthier − villars 1969* .
F • R • Gantmacher."Théorie des matrices " *• Edition J • Gabay 1990.*
R.Goblot ."Algébre linéaire " *Masson 1995* .
E.Gourgoulhon ."Relativité restreinte" *• EDP Sciences 2010* .
J. Grifone."Algèbre Linéaire" *• Cepadues éditions 2002* .
J − B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec."Exercices Algèbre linéaire". *Cepadues éditions 1988* .
D.Langlois."Introduction à la relativité". *Vuibert 2011.*
J.R. Lucas , P.E. Hodgson "Spacetime and electromagnetism " . *Clarenton Press 1990* .
R. Mneimé , F. Testard ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ". *Hermann Paris 1986* .
J - M. Monier."Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997* .
J.Ph.Pérez ." Relativité et invariance " *Dunod 2011.*
W.Rudin ."Analyse réelle et complexe ". *Masson 1978* .
C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". *Dunod 2010.*
J - M. Souriau."Calcul Linéaire ". *PUF 1964* .
N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " . *Springer 2002* .

Résumé :

Aprés avoir exploré les conséquences des hypothèses d 'invariance des droites , du cône d 'isotropie et d 'invariance des lois de la physique on propose une démarche purement mathématique pour obtenir la formulation la plus générale des matrices de Lorentz .